

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk memodelkan berbagai sistem dan jaringan dalam kehidupan nyata, seperti jaringan komunikasi, jaringan komputer, hingga sistem transportasi. Salah satu topik dalam teori graf yang mengalami perkembangan signifikan dalam beberapa dekade terakhir adalah dominasi [1]. Konsep dominasi bermula pada tahun 1862 ketika seorang pemain catur asal Eropa bernama Carl Friedrich de Jaensch berusaha untuk menentukan jumlah minimum bidak ratu yang diperlukan untuk menyerang atau mengontrol seluruh kotak pada papan catur $n \times n$ [2]. Permasalahan tersebut kemudian dikonstruksikan dalam bentuk graf, dengan kotak papan catur sebagai simpul dan perpindahan ratu sebagai sisi.

Secara formal, istilah dominasi pertama kali diperkenalkan oleh Ore pada tahun 1962, sementara konsep awal dominasi dalam teori graf telah didefinisikan sebelumnya oleh Claude Berge pada tahun 1958 dengan istilah ‘koefisien stabilitas eksternal’ [3], [4], [5]. Sejak diperkenalkan, konsep dominasi berkembang pesat dan menghasilkan lebih dari 75 variasi parameter dominasi, termasuk di antaranya dominasi jarak- k dan invers dominasi [1].

Konsep dominasi jarak- k diperkenalkan oleh Meir dan Moon pada tahun 1975 melalui istilah ‘ k -covering’, yang menggabungkan konsep jarak dengan dominasi pada graf [6]. Selanjutnya, Slater memperkenalkan istilah ‘ k -basis’ sebagai bilangan dominasi jarak- k dengan mengkaji masalah pemilihan kota minimum sebagai lokasi stasiun pemancar, sehingga setiap kota dapat menerima pesan dari setidaknya satu stasiun melalui tautan komunikasi dalam jarak tertentu [7]. Penelitian lebih lanjut membahas batasan bilangan dominasi jarak- k pada berbagai jenis graf [8], [9]. Terkait dengan nilai k tertentu, bilangan dominasi jarak-2 dan jarak-3 pada graf Bintang Sierpinski telah dikaji oleh Annida dkk. [10].

Sementara itu, konsep invers dominasi pada graf diperkenalkan oleh Kulli dan Sigarkanti pada tahun 1991 dengan aplikasi untuk memastikan kestabilan jaringan komunikasi dan distribusi listrik [11]. Misalkan terdapat jaringan distribusi

listrik dengan beberapa stasiun pembangkit listrik yang menyuplai daya ke wilayah tertentu. Setiap stasiun pembangkit listrik dalam himpunan D menyuplai daya ke sejumlah stasiun distribusi. Jika suatu stasiun pembangkit mengalami kerusakan, maka himpunan invers dominasi D^{-1} yang terdiri dari beberapa stasiun pembangkit listrik lain akan menggantikan peran stasiun yang gagal tersebut untuk memastikan aliran listrik tetap berjalan ke seluruh wilayah [12]. Penelitian seputar invers dominasi telah dilakukan pada berbagai graf, seperti graf bipartit kubik [13], graf sirkulan [1], serta struktur pohon seperti *X-tree* dan *sibling tree* [12].

Penelitian mengenai dominasi jarak- k dan invers dominasi pada graf menjadi topik menarik dalam teori graf. Pada tahun 2017, Lakshmi dan Bibi membahas invers dominasi jarak-2 pada graf dengan memodelkan jaringan komputer sebagai *hypercube*, di mana simpul mewakili komputer dan sisi mewakili tautan komunikasi antar komputer [14]. Himpunan invers dominasi jarak-2 digunakan untuk mengumpulkan informasi dari semua prosesor dengan tunda maksimal dua unit. Selain itu, Bibi dkk. mengkaji algoritma untuk menentukan himpunan invers dominasi jarak-2 pada graf [15]. Namun, sejauh penelusuran penulis, belum ditemukan kajian terkait invers dominasi jarak- k , padahal parameter k memberikan pendekatan yang lebih umum dan fleksibel karena jangkauan dominasi dapat disesuaikan dengan karakteristik dan kebutuhan suatu sistem.

Di sisi lain, kajian dominasi pada graf dengan struktur rekursif dan fraktal juga terus berkembang. Salah satu graf yang menarik untuk diteliti adalah graf Bintang Sierpinski yang diperkenalkan oleh Khabibah pada tahun 2017 [16]. Graf ini merupakan representasi diskrit dari Segitiga Sierpinski yang memiliki sifat *self-similarity*, sehingga setiap bagian graf memiliki pola yang menyerupai keseluruhan graf. Struktur rekursif tersebut menghasilkan pola keterhubungan yang kompleks namun teratur, sehingga memungkinkan diperolehnya pola-pola dominasi secara rekursif. Selain itu, parameter dominasi, khususnya bilangan dominasi jarak- k dan bilangan invers dominasi jarak- k , dipengaruhi oleh struktur dan distribusi jarak antar simpul pada graf. Oleh karena itu, graf Bintang Sierpinski menjadi objek yang menarik untuk dikaji karena karakteristik fraktalnya memberikan perilaku yang khas terhadap parameter dominasi, sementara kajian mengenai parameter tersebut pada graf Bintang Sierpinski masih relatif terbatas.

Gambar 1.1 berikut merupakan *state of the art* perkembangan penelitian terkait bilangan dominasi jarak- k dan bilangan invers dominasi jarak- k . Bagan ini menunjukkan bagaimana konsep dominasi berkembang dari permasalahan klasik hingga ke penerapan konsep dominasi jarak dan invers dominasi pada berbagai jenis graf, termasuk graf Bintang Sierpinski.



Gambar 1.1 *State of the Art* Perkembangan Penelitian Terkait Bilangan Dominasi Jarak- k dan Bilangan Invers Dominasi Jarak- k pada Graf

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji bilangan dominasi jarak- k dan bilangan invers dominasi jarak- k pada graf Bintang Sierpinski. Selain didasari oleh masih terbatasnya kajian mengenai graf Bintang Sierpinski, penelitian ini juga dilatarbelakangi oleh belum banyak ditemukannya penelitian mengenai invers dominasi jarak- k . Oleh karena itu, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi teoretis terhadap pengembangan konsep dominasi pada graf.

1.2. Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana merumuskan bilangan dominasi jarak- k pada graf Bintang Sierpinski?
2. Bagaimana merumuskan bilangan invers dominasi jarak-2 dan jarak-3 pada graf Bintang Sierpinski?
3. Bagaimana merumuskan bilangan invers dominasi jarak- k pada graf Bintang Sierpinski?

1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada aspek-aspek berikut:

1. Graf yang dikaji dalam penelitian ini adalah graf Bintang Sierpinski SS_n untuk $n \geq 1$.
2. Parameter bilangan dominasi yang dikaji meliputi bilangan dominasi jarak- k dan bilangan invers dominasi jarak- k .

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Merumuskan bilangan dominasi jarak- k pada graf Bintang Sierpinski.
2. Merumuskan bilangan invers dominasi jarak-2 dan jarak-3 pada graf Bintang Sierpinski.
3. Merumuskan bilangan invers dominasi jarak- k pada graf Bintang Sierpinski.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini antara lain:

1. Menambah informasi dan ilmu pengetahuan dalam bidang teori graf.
2. Memberikan hasil baru terkait bilangan dominasi jarak- k dan bilangan invers dominasi jarak- k pada graf Bintang Sierpinski.

1.6. Sistematika Penulisan

Tesis ini disusun dalam lima bab utama dengan rincian sebagai berikut:

1. BAB I Pendahuluan
Menguraikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, serta sistematika penulisan tesis secara keseluruhan.
2. BAB II Tinjauan Pustaka dan Landasan Teori
Menyajikan kajian literatur yang relevan dengan penelitian, serta memuat konsep-konsep dasar dan teori yang digunakan, seperti konsep dasar teori graf, graf Bintang Sierpinski, bilangan dominasi jarak- k , dan bilangan invers dominasi pada graf secara umum.
3. BAB III Metodologi Penelitian
Menjelaskan jenis dan pendekatan penelitian yang digunakan, langkah-langkah penelitian, serta metode analisis yang dilakukan dalam menentukan bilangan dominasi jarak- k dan bilangan invers dominasi jarak- k pada graf Bintang Sierpinski.
4. BAB IV Hasil dan Pembahasan
Mendeskripsikan hasil penelitian yang diperoleh, meliputi penentuan bilangan dominasi jarak- k dan bilangan invers dominasi jarak- k pada graf Bintang Sierpinski, serta pembahasan pola dan generalisasi yang dihasilkan.
5. BAB V Penutup
Merangkum kesimpulan utama dari penelitian dan memberikan saran untuk pengembangan di masa mendatang.