

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf bermula dari kajian yang dilakukan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 saat ia meneliti masalah tujuh jembatan Königsberg. Permasalahan tersebut mempertanyakan apakah seseorang dapat melintasi tujuh jembatan yang menghubungkan empat wilayah yang dipisahkan oleh Sungai Pregel di Königsberg, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke titik awal. Untuk menganalisisnya, Euler merepresentasikan setiap wilayah sebagai titik (*vertex*) dan setiap jembatan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan titik-titik terkait. Melalui analisis tersebut, Euler menunjukkan bahwa perjalanan seperti itu tidak dapat dilakukan apabila derajat titik-titik pada graf tidak semuanya bernilai genap. Hasil ini kemudian menjadi salah satu dasar lahirnya teori graf modern.

Salah satu topik yang banyak dikaji dalam teori graf adalah pelabelan graf. Perkembangan penelitian di bidang ini berlangsung sangat pesat. Berdasarkan survei pada [1], sejak diperkenalkan pada pertengahan tahun 1960-an, lebih dari 200 jenis pelabelan graf telah diteliti dan dibahas dalam lebih dari 2.500 publikasi ilmiah. Selain memiliki nilai teoretis, pelabelan graf juga memiliki berbagai aplikasi praktis. Menurut Bloom dkk. [2], konsep pelabelan graf telah diterapkan dalam sejumlah bidang, seperti teori pengkodean, perancangan sistem komunikasi, desain jaringan komputer, perancangan sirkuit, serta kristalografi sinar-X (*X-ray crystallography*).

Terdapat beberapa jenis pelabelan graf yang dikaitkan dengan bobot sisi atau bobot titiknya. Jumlahan dari label semua sisi yang insiden ke suatu titik (beserta label titik tersebut jika ada) disebut bobot titik, sedangkan jumlahan dari label titik yang insiden ke suatu sisi (beserta label sisi tersebut jika ada) disebut bobot sisi.

Pada tahun 1988, Chartrand dkk. [3] mengenalkan pelabelan- k sisi pada graf G sebagai suatu fungsi f dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga bobot titik v semuanya berbeda untuk

setiap $v \in V(G)$. Bilangan bulat terkecil k sehingga graf G dapat dilabeli dengan pelabelan $-k$ sisi disebut kekuatan tak reguler dan dinotasikan dengan $s(G)$.

Termotivasi dari penelitian Chartrand dkk. tersebut, pada tahun 2007 Baca dkk.[4] mengenalkan jenis pelabelan baru, yaitu pelabelan graf dengan bobot sisi semua berbeda dan label bisa dipakai lebih dari satu kali. Jenis pelabelan baru ini adalah pelabelan total tak reguler sisi. Misalkan G merupakan graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Menurut [4], pelabelan $-k$ total tak reguler sisi pada G adalah fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \dots, k\}$ sehingga bobot setiap sisi semuanya berbeda. Bobot sisi uv dinotasikan $\omega f(uv)$ didefinisikan sebagai $\omega f(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$. Bilangan bulat terkecil k sehingga graf G dapat dilabeli dengan pelabelan $-k$ total tak reguler sisi disebut kekuatan tak reguler sisi total dan dinotasikan dengan $tes(G)$. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang pelabelan $-k$ total tak reguler sisi dan kekuatan tak reguler sisi total $tes(G)$ pada [5-10].

Pada tahun 2014, Ahmad dkk. [11] mengenalkan karakteristik baru dalam pelabelan graf yaitu kekuatan tak reguler sisi pada graf. Kekuatan tak reguler sisi didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil k sehingga graf G dapat dilabeli dengan pelabelan $-k$ titik tak reguler sisi dan dinotasikan dengan $es(G)$.

Pelabelan $-k$ titik tak reguler sisi f didefinisikan sebagai fungsi dari $V(G)$ ke $\{1, 2, \dots, k\}$ sehingga bobot semua sisi berbeda, dengan bobot sisi uv di G didefinisikan sebagai $\omega f(uv) = f(u) + f(v)$. Bilangan bulat terkecil k sehingga graf G dapat dilabeli dengan pelabelan $-k$ tak reguler sisi disebut kekuatan tak reguler sisi dan dinotasikan dengan $tes(G)$. Penelitian tentang pelabelan $-k$ tak reguler sisi dan kekuatan tak reguler sisi total $es(G)$ telah dilakukan beberapa peneliti pada artikel [12-14].

Terinspirasi dari [3], Baca dkk [14] mengenalkan suatu parameter graf yang baru yaitu kekuatan tak reguler modular. Kekuatan tak reguler modular muncul dari studi tentang kekuatan tak reguler versi modular. Misal G merupakan graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dengan banyak titik n dan tidak ada komponen dengan order 2. Suatu pelabelan $-k$ sisi $E(G)$ ke $\{1, 2, \dots, k\}$ disebut pelabelan $-k$ tak reguler modular pada suatu graf G jika terdapat suatu pemetaan

bijektif bobot titik $\partial: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ yang didefinisikan dengan $\partial(x) = \sum f(xy)$ disebut bobot modular dari suatu titik x , dengan $\mathbb{Z}_n$ grup bilangan bulat modulo n . Kekuatan tak reguler modular didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil k sehingga graf G dapat dilabeli dengan pelabelan- k tak reguler modular dan dinotasikan dengan $ms(G)$. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang pelabelan k tak reguler modular dan kekuatan tak reguler modular $ms(G)$ pada [15] [16].

Termotivasi dari pelabelan tak reguler modular dan pelabelan sisi tak reguler, Koam dkk [17] mengenalkan pelabelan tak reguler sisi modular. merupakan modifikasi dari 2 pelabelan tak reguler. Pelabelan- k tak reguler sisi modular pada G adalah fungsi f dari $V(G)$ ke $\{1, 2, \dots, k\}$ sehingga terdapat fungsi bijektif bobot sisi $\partial: E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_n$. Bobot sisi uv dinotasikan $\omega f(uv)$ didefinisikan sebagai $\omega f(uv) = (\partial(u) + \partial(v)) \bmod |E(G)|$. Bilangan bulat terkecil k sehingga graf G dapat dilabeli dengan pelabelan- k tak reguler sisi modular disebut kekuatan tak reguler sisi modular dan dinotasikan dengan $mes(G)$. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang pelabelan- k tak reguler sisi modular dan kekuatan tak reguler sisi modular $mes(G)$ pada [18] [19].

Penelitian mengenai kekuatan tak reguler sisi modular atau *modular edge irregularity strength* ($mes(G)$) hingga saat ini masih tergolong terbatas dan belum banyak dikaji secara luas. Sebagian besar penelitian sebelumnya hanya memfokuskan pada graf-graf sederhana seperti graf lintasan, graf sikel, graf bintang, dan beberapa graf hasil operasi graf. Beberapa penelitian yang mengkaji secara langsung mengenai $mes(G)$ antara lain dilakukan oleh Bača dkk pada tahun 2020 [20], yang memperkenalkan konsep kekuatan tak reguler modular pada graf, serta dilanjutkan oleh Ali dkk pada tahun 2023 [21] yang membahas secara khusus kekuatan tak reguler sisi modular. Namun demikian, jumlah kajian yang membahas topik ini secara mendalam masih relatif sedikit dibandingkan dengan topik pelabelan graf lainnya, sehingga menunjukkan bahwa bidang ini masih terbuka luas untuk dieksplorasi lebih lanjut.

Untuk mendapatkan suatu graf baru dapat dilakukan modifikasi pada graf yang sudah ada. Modifikasi pada graf dilakukan dengan cara menambahkan titik

atau sisi, mengurangi titik/sisi, atau melakukan operasi antar graf. Graf sikel merupakan graf lintasan dengan titik awal dan titik akhir yang sama. Graf sikel dapat dimodifikasi dengan menambahkan titik baru dan menghubungkannya dengan titik pada graf sikel sehingga terbentuk graf baru. Selain menambahkan titik pada graf sikel dapat juga dilakukan duplikasi dari graf sikel dan diperoleh graf baru. Berdasarkan penelusuran terkait penelitian tentang pelabelan- k tak reguler sisi modular pada beberapa kelas graf, belum banyak yang mengkaji tentang mes pada graf yang dimodifikasi dari graf sikel. Oleh karena itu pada penelitian ini mengkaji pengkonstruksian pelabelan- k tak reguler sisi modular sehingga diperoleh kekuatan tak reguler sisi modular pada graf yang diperoleh dari modifikasi graf sikel seperti graf ubur-ubur, graf pensil raut serta graf tangga.

1.2 Rumusan Masalah

Secara umum, rumusan masalah pada penelitian yang akan dibahas pada tesis berdasarkan latar belakang adalah tentang kekuatan tak reguler sisi modular pada beberapa jenis graf hasil modifikasi dari graf sikel. Adapun rumusan masalahnya adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana cara menentukan nilai kekuatan tak reguler sisi modular pada graf ubur-ubur $J_{n,1}$, $J_{n,2}$ dan $J_{n,3}$, serta bagaimana konstruksi label titik pada masing-masing graf sehingga nilai tersebut dapat diperoleh?
2. Bagaimana cara menentukan nilai kekuatan tak reguler sisi modular pada graf pensil raut tunggal (P_{C_n}) dan graf pensil raut ganda (P'_{C_n}) serta bagaimana konstruksi label titik pada masing-masing graf sehingga nilai tersebut dapat diperoleh?
3. Bagaimana cara menentukan nilai kekuatan tak reguler sisi modular pada graf tangga (L_n) dan graf tangga miring (SL_n) serta bagaimana konstruksi label titik pada masing-masing graf sehingga nilai tersebut dapat diperoleh?

1.3 Batasan Masalah

Pada penulisan tesis ini diberikan batasan permasalahan berupa pengkonstruksian label titik pada graf sehingga bobot sisi graf tersebut memiliki nilai $mes(G)$. Adapun graf yang akan dikaji yaitu beberapa graf hasil modifikasi dari graf sikel seperti graf ubur-ubur $J_{n,1}$, $J_{n,2}$ dan $J_{n,3}$. Selain itu, graf modifikasi dari graf sikel

lainnya yang akan dikaji yaitu graf pensil raut tunggal dan graf pensil raut ganda, serta graf tangga dan graf tangga miring.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian yang akan dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Membuktikan bahwa graf ubur-ubur $J_{n,1}$, $J_{n,2}$ dan $J_{n,3}$ dapat dilabeli titiknya sehingga bobot sisinya memiliki $mes(G)$.
2. Membuktikan bahwa graf pensil raut tunggal (P_{C_n}) dan graf pensil raut ganda (P'_{C_n}) dapat dilabeli titiknya sehingga bobot sisinya memiliki $mes(G)$.
3. Membuktikan bahwa graf graf tangga (L_n) dan graf tangga miring (SL_n) dapat dilabeli titiknya sehingga bobot sisinya memiliki $mes(G)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori graf, khususnya dalam kajian kekuatan tak reguler sisi modular (*modular edge irregularity strength*). Hasil penelitian ini memperluas kajian mengenai nilai *modular edge irregularity strength* pada beberapa graf hasil modifikasi dari graf sikel, yaitu graf ubur-ubur $J_{n,1}$, $J_{n,2}$, dan $J_{n,3}$, serta graf graf pensil raut tunggal (P_{C_n}) dan graf pensil raut ganda (P'_{C_n}). Adapun graf hasil modifikasi lainnya yaitu graf graf tangga (L_n) dan graf tangga miring (SL_n).

Selain itu, penelitian ini memperluas kajian teoritis pada bidang pelabelan graf dengan memberikan konstruksi pelabelan titik yang menghasilkan bobot sisi berbeda secara modular. Konstruksi yang diperoleh dapat digunakan sebagai referensi dalam menentukan nilai *modular edge irregularity strength* pada kelas graf lainnya yang memiliki karakteristik serupa. Penelitian ini juga diharapkan dapat memperkaya kajian mengenai hubungan antara konsep pelabelan graf dan aritmetika modulo, sehingga membuka peluang bagi pengembangan penelitian lebih lanjut pada kedua bidang tersebut.

Lebih lanjut, hasil penelitian ini dapat menjadi sumber referensi bagi peneliti yang tertarik pada topik pelabelan graf, khususnya pelabelan tidak teratur dan kekuatan tak reguler sisi modular, serta menjadi dasar untuk pengembangan

kajian pada graf hasil modifikasi lainnya maupun pada jenis pelabelan graf yang berbeda.

1.6 Sistematika Penulisan

Subbab ini menjelaskan susunan isi tesis secara umum dan sistematis, dengan memberikan gambaran ringkas mengenai isi dari setiap bab. Tesis ini disusun dalam empat bab utama, dengan rincian sebagai berikut.

Bab I berisi pendahuluan yang menguraikan latar belakang penelitian yang mendasari kajian tentang kekuatan tak reguler sisi modular pada graf, rumusan masalah yang diteliti, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, serta sistematika penulisan tesis secara keseluruhan.

Selanjutnya bab II berisi Tinjauan Pustaka dan Landasan yang memuat kajian terhadap penelitian terdahulu yang relevan dengan topik penelitian, serta menyajikan landasan teori yang digunakan. Teori tersebut meliputi terminologi dasar dalam teori graf, seperti definisi berbagai jenis graf, pelabelan titik, pelabelan sisi, serta pembobotan. Selain itu, dibahas pula konsep-konsep terkait seperti $s(G)$, $es(G)$ dan $mes(G)$ yang menjadi dasar dalam penelitian ini.

Adapun Bab III merupakan Metodologi Penelitian yang menjelaskan langkah-langkah penelitian yang telah dilakukan, mulai dari pendekatan yang digunakan, prosedur dalam menganalisis graf, hingga metode yang digunakan untuk menentukan kekuatan tak reguler sisi modular pada graf hasil modifikasi dari graf sikel.

Pada bab selanjutnya yaitu Bab IV yang isinya Hasil dan Pembahasan. Bab ini menguraikan definisi dari beberapa graf hasil modifikasi dari graf sikel yang menjadi objek penelitian. Selanjutnya, pada bab ini disajikan hasil penentuan kekuatan tak reguler sisi modular pada graf-graf tersebut beserta pembahasannya. Hasil yang diperoleh dianalisis secara matematis untuk menunjukkan karakteristik dan pola yang ditemukan.

Bab yang terakhir yaitu Bab V atau Penutup. Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari seluruh hasil penelitian, serta saran yang diajukan untuk pengembangan penelitian selanjutnya