

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Bidang aljabar merupakan salah satu bidang dalam matematika yang banyak digunakan di berbagai bidang. Di matematika, terkhususnya di kalkulus, konsep derivatif merupakan salah satu konsep dalam matematika yang banyak diaplikasikan dalam permasalahan nyata, seperti penentuan laba maksimum seperti yang dijelaskan dalam [1]. Berdasarkan sejarah terciptanya turunan dalam [2], konsep turunan ini mulai dipelajari dalam permasalahan menghitung kemiringan kurva oleh Archimedes. Menurut [1], penemuan konsep turunan secara formal ditemukan oleh fisikawan dan matematikawan yang bernama Isaac Newton (1642-1727) dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Konsep turunan berkaitan dengan struktur aljabar abstrak. Konsep turunan di kalkulus memerlukan fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pada kalkulus, turunan dinotasikan sebagai $\frac{d}{dx}$, di mana untuk setiap fungsi $f(x)$ dengan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku $\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Pada konsep turunan, terdapat aturan Leibnitz, yaitu untuk setiap fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ berlaku

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

dan

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))$$

seperti yang dijelaskan pada [3].

Berdasarkan [4], suatu ring R adalah struktur yang memuat sebuah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yang biasa disebut operasi penjumlahan “+” dan operasi perkalian “ $\cdot$ ” sedemikian sehingga $(R, +)$ adalah grup abelian, $(R, \cdot)$ adalah semigrup, serta operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi hukum distributif kiri dan kanan. Dalam teori ring, terdapat jenis ring khusus yang dibangun dari suatu atau beberapa ring lain, yaitu ring hasil bagi, ring faktor, dan ring hasil kali kartesian. Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan

elemen satuan, I ideal dari R , dan himpunan $A \subset R$ yang tidak memuat elemen nol, tidak memuat elemen pembagi nol, dan tertutup secara multiplikatif. Pada teori ring, apabila ring R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan dan himpunan $A \subset R$ yang tidak memuat elemen nol, tidak memuat elemen pembagi nol, dan tertutup secara multiplikatif, maka dapat dikonstruksikan ring hasil bagi $R_A = \left\{ \frac{r}{a} \mid r \in R, a \in A \right\}$ dengan operasi penjumlahan “ $+_A$ ” dan perkalian “ $\cdot_A$ ” didefinisikan sebagai $\frac{r_1}{a_1} +_A \frac{r_2}{a_2} = \frac{r_1 \cdot a_2 + r_2 \cdot a_1}{a_1 \cdot a_2}$ dan $\frac{r_1}{a_1} \cdot_A \frac{r_2}{a_2} = \frac{r_1 \cdot r_2}{a_1 \cdot a_2}$ untuk setiap $\frac{r_1}{a_1}, \frac{r_2}{a_2} \in R_A$. Dari ring R dan I ideal dari R , dapat dikonstruksikan ring faktor $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$ dengan operasi penjumlahan “ $\bar{+}$ ” dan perkalian “ $\bar{\cdot}$ ” didefinisikan sebagai $(r_1 + I) \bar{+} (r_2 + I) = (r_1 + r_2) + I$ dan $(r_1 + I) \bar{\cdot} (r_2 + I) = (r_1 \cdot r_2) + I$ untuk setiap $r_1 + I, r_2 + I \in R/I$. Apabila terdapat $\{R_i\}_{i \in \Delta}$ adalah keluarga ring dengan $i \in \Delta$ dan Δ adalah himpunan indeks, maka dapat dikonstruksikan ring hasil kali kartesian $\prod_{i \in \Delta} R_i = \{(r_i)_{i \in \Delta} \mid r_i \in R_i, i \in \Delta\}$ dengan operasi penjumlahan “ $+$ ” dan perkalian “ $\cdot$ ” didefinisikan sebagai $(r_i)_{i \in \Delta} + (s_i)_{i \in \Delta} = (r_i + s_i)_{i \in \Delta}$ dan $(r_i)_{i \in \Delta} \cdot (s_i)_{i \in \Delta} = (r_i \cdot s_i)_{i \in \Delta}$. Pada konsep turunan digunakan fungsi yang memetakan dari himpunan bilangan riil ke himpunan bilangan riil di mana himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan bilangan riil “ $+$ ” dan perkalian bilangan riil “ $\cdot$ ” membentuk struktur ring. Oleh karena konsep turunan digunakan pada struktur ring, maka didefinisikan derivasi pada ring yang termotivasi dari aturan Leibnitz.

Menurut [5], [6], dan [7], pemetaan $d: R \rightarrow R$ disebut derivasi pada ring R apabila untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $d(a + b) = d(a) + d(b)$ dan $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b)$. Terdapat derivasi yang berlaku di setiap ring R yang disebut sebagai inner derivasi. Inner derivasi adalah suatu pemetaan $d_a: R \rightarrow R$ dengan sebuah elemen tetap $a \in R$ yang didefinisikan $d_a(r) = a \cdot r - r \cdot a$ untuk setiap $r \in R$ seperti yang dijelaskan pada [7]. Hal tersebut memotivasi penulis untuk mengonstruksikan derivasi pada masing-masing ring hasil bagi, ring faktor, dan ring hasil kali kartesian. Apabila ring R memiliki derivasi d , himpunan $A \subset R$ yang tidak memuat elemen nol, tidak

memuat elemen pembagi nol, dan tertutup secara multiplikatif, serta I adalah ideal- d dari R , maka dapat dikonstruksikan derivasi $d_A: R_A \rightarrow R_A$ pada ring hasil bagi R_A dengan definisi $d_A\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{d(r) \cdot a - r \cdot d(a)}{a^2}$ untuk setiap $\frac{r}{a} \in R_A$ dan derivasi $\bar{d}: R/I \rightarrow R/I$ pada ring faktor R/I dengan definisi $\bar{d}(r + I) = d(r) + I$ untuk setiap $r + I \in R/I$. Lalu, apabila diberikan keluarga ring $\{R_i\}_{i \in \Delta}$ dan keluarga derivasi $\{d_i\}_{i \in \Delta}$, maka dapat dikonstruksikan derivasi $\prod_{i \in \Delta} d_i: \prod_{i \in \Delta} R_i \rightarrow \prod_{i \in \Delta} R_i$ pada ring hasil kali kartesian $\prod_{i \in \Delta} R_i$ dengan definisi $\prod_{i \in \Delta} d_i((r_i)_{i \in \Delta}) = (d_i(r_i))_{i \in \Delta}$ untuk setiap $(r_i)_{i \in \Delta} \in \prod_{i \in \Delta} R_i$.

Di dalam Tugas akhir ini, dibahas mengenai derivasi pada ring hasil bagi R_A , ring faktor R/I , dan ring hasil kali kartesian $\prod_{i \in \Delta} R_i$ yang memiliki elemen satuan beserta dengan sifat-sifatnya.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, maka permasalahan yang diangkat dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana penjelasan proses mengonstruksikan derivasi pada ring hasil bagi R_A , ring faktor R/I , dan ring hasil kali kartesian $\prod_{i \in \Delta} R_i$ yang dikonstruksikan dari ring R dengan elemen satuan, I adalah ideal- d dari R , himpunan $A \subset R$ yang tidak memuat elemen nol, tidak memuat elemen pembagi nol, dan tertutup secara multiplikatif, serta keluarga ring $\{R_i\}_{i \in \Delta}$?
2. Bagaimana sifat yang dimiliki dari derivasi pada ring hasil bagi R_A ?

1.3. Batasan Masalah

Pembahasan dalam Tugas Akhir ini dibatasi mengenai derivasi pada ring hasil bagi, ring faktor, dan ring hasil kali kartesian dengan elemen satuan yang dikonstruksikan dari ring R dengan elemen satuan, I adalah ideal- d dari R , himpunan $A \subset R$ yang tidak memuat elemen nol, tidak memuat elemen pembagi nol, dan tertutup secara multiplikatif, serta keluarga ring $\{R_i\}_{i \in \Delta}$.

1.4. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Menjelaskan tentang proses mengonstruksikan derivasi pada ring hasil bagi R_A , ring faktor R/I , dan ring hasil kali kartesian $\prod_{i \in \Delta} R_i$ yang dikonstruksikan dari ring R dengan elemen satuan, I adalah ideal- d dari R , himpunan $A \subset R$ yang tidak memuat elemen nol, tidak memuat elemen pembagi nol, dan tertutup secara multiplikatif, serta keluarga ring $\{R_i\}_{i \in \Delta}$.
2. Menjelaskan tentang sifat yang dimiliki dari derivasi pada ring hasil bagi R_A .

1.5. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada Tugas Akhir ini terbagi menjadi empat bab dengan masing-masing bab terdiri dari beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut.

- | | |
|---------|--|
| Bab I | : Pendahuluan yang berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan. |
| Bab II | : Landasan Teori yang berisi teori-teori dasar untuk mendukung pembahasan, seperti teori grup, teori ring, dan derivasi pada ring. |
| Bab III | : Pembahasan yang berisi pembahasan utama dari definisi derivasi secara umum pada ring hasil bagi, ring faktor, dan ring hasil kali kartesian beserta dengan sifat-sifatnya. |
| Bab IV | : Penutup yang berisi kesimpulan dari keseluruhan hasil dan pembahasan Tugas Akhir. |