

SKRIPSI

**PELABELAN ANTI AJAIB PADA GRAF KORONA $P_n \odot S_m$ DAN GRAF
DEGREE SPLITTING $DS(P_n \odot S_m)$**

***ANTIMAGIC LABELING ON CORONA GRAPH $P_n \odot S_m$ AND DEGREE
SPLITTING GRAPH $DS(P_n \odot S_m)$***



ELDE MERCYANO SANTOSO

24010121130084

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG**

2025

SKRIPSI

**PELABELAN ANTI AJAIB PADA GRAF KORONA $P_n \odot S_m$ DAN GRAF
DEGREE SPLITTING $DS(P_n \odot S_m)$**

***ANTIMAGIC LABELING ON CORONA GRAPH $P_n \odot S_m$ AND DEGREE
SPLITTING GRAPH $DS(P_n \odot S_m)$***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana
Matematika



ELDE MERCYANO SANTOSO

24010121130084

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS DIPONEGORO

SEMARANG

2025

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

PELABELAN ANTI AJAIB PADA GRAF KORONA $P_n \odot S_m$ DAN GRAF
DEGREE SPLITTING $DS(P_n \odot S_m)$

Telah dipersiapkan dan diusulkan oleh:

ELDE MERCYANO SANTOSO

24010121130084

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji

Pada tanggal 13 Juni 2025

Susunan Tim Penguji

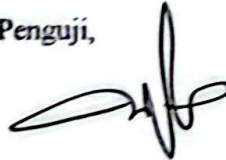
Pembimbing II/Penguji,



Drs. Yusephus Decupertino, M.Si.

NIP. 196409181993031002

Penguji,



Niswah Qonita, S.Si., M.Sc.

NIP. 199804242023072001

Mengetahui
Ketua Departemen Matematika,

Dr. Supriyanto, S.Si., M.Si.
NIP. 197410142000121001

Pembimbing I/Penguji,



Dr. Lucia Ratnasari, S.Si., M.Si.

NIP. 197106271998022001

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya ini dipersembahkan untuk:

Saya

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “Pelabelan Anti Ajaib pada Graf Korona $P_n \odot S_m$ dan Graf *Degree Splitting* $DS(P_n \odot S_m)$ ” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.

Penyusunan Tugas Akhir ini tidak lepas dari bantuan, dukungan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si., selaku Ketua Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.
2. Bapak Dr. Moch. Fandi Ansori, S.Si., M.Si., selaku Koordinator Tugas Akhir Departemen Matematika.
3. Ibu Lucia Ratnasari, S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, bantuan, dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. Yusephus Decupertino, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, bantuan, dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Niswah Qonita, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Penguji yang telah bersedia menguji dan memberi masukan kepada penulis untuk menyempurnakan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa masih ada banyak kekurangan dalam Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menyempurnakan

Semarang, 13 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL LUAR	ii
HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
KATA PENGANTAR.....	iv
DAFTAR ISI	v
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN.....	xi
ABSTRAK.....	xii
ABSTRACT.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Penelitian.....	3
1.4 Tujuan Penulisan	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Metodologi Penelitian	3
1.7 Sistematika Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	5
2.1 Pengertian Graf	5
2.2 Jenis-jenis Graf.....	8
2.3 Pelabelan Graf.....	9

BAB III PEMBAHASAN	15
3.1 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf P_n dan S_m	17
3.2 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf <i>Degree Splitting</i> $DS(P_n)$ dan $DS(S_m)$	20
3.3 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf Korona $P_n \odot S_m$	31
3.4 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf Korona <i>Degree Splitting</i> $DS(P_n \odot S_m)$	53
BAB IV PENUTUP	70
4.1 Kesimpulan	70
DAFTAR PUSTAKA	71

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G_1	5
Gambar 2.2 Titik Bertetangga dan Sisi Bertetangga.....	6
Gambar 2.3 Graf G_2	6
Gambar 2.4 Graf Sederhana (a) Graf Ganda (b) Graf Semu (c)	8
Gambar 2.5 Graf P_2 dan P_3	9
Gambar 2.6 Graf S_4	9
Gambar 2.7 Fungsi Injektif	10
Gambar 2.8 Fungsi Surjektif.....	10
Gambar 2.9 Fungsi Bijektif.....	11
Gambar 2.10 Graf G_3	12
Gambar 2.11 Graf G_3 dengan Label Titik	12
Gambar 2.12 Graf G_3 dengan Label Sisi.....	13
Gambar 2.13 Graf G_3 dengan Label Titik dan Label Sisi	13
Gambar 2.14 Graf G_3 dengan Label Bobot Titik	14
Gambar 3.1 Graf G_4	15
Gambar 3.2 Graf G_4 denan Label Titik dan Sisi	16
Gambar 3.3 Graf G_4 dengan Label Total Sisi.....	16
Gambar 3.4 Graf P_5	17
Gambar 3.5 Graf P_5 dengan Label Titik dan Sisi.....	17
Gambar 3.6 Graf P_5 dengan Bobot Total Sisi	18
Gambar 3.7 Graf S_5	19
Gambar 3.8 Graf S_5 dengan Label Titik dan Sisi.....	19
Gambar 3.9 Graf S_5 dengan Bobot Total Sisi	20
Gambar 3.10 Graf G_5	21
Gambar 3.11 Graf $DS(G_5)$	21

Gambar 3.12 Graf P_n	21
Gambar 3.13 Graf $DS(P_n)$	22
Gambar 3.14 Graf S_n	22
Gambar 3.15 Graf $DS(S_n)$	23
Gambar 3.16 Graf $DS(P_2)$ dan Graf $DS(P_3)$	23
Gambar 3.17 Graf C_3	24
Gambar 3.18 Graf C_4	24
Gambar 3.19 Graf P_5	25
Gambar 3.20 Graf $DS(P_5)$	26
Gambar 3.21 Graf $DS(P_5)$ dengan Label Titik dan Sisi	26
Gambar 3.22 Graf $DS(P_5)$ dengan Bobot Total Sisi.....	27
Gambar 3.23 Graf S_4	29
Gambar 3.24 Graf $DS(S_4)$	29
Gambar 3.25 Graf $DS(S_4)$ dengan Label Titik dan Sisi	30
Gambar 3.26 Graf $DS(S_4)$ dengan Bobot Total Sisi.....	31
Gambar 3.27 Graf G_6	32
Gambar 3.28 Graf H	32
Gambar 3.29 Graf $G_6 \odot H$	32
Gambar 3.30 Graf P_n	33
Gambar 3.31 Graf S_m	33
Gambar 3.32 Graf $P_n \odot S_m$	33
Gambar 3.33 Graf P_2	35
Gambar 3.34 Graf S_2	35
Gambar 3.35 Graf $P_2 \odot S_2$	36
Gambar 3.36 Graf $P_2 \odot S_2$ dengan Label Titik dan Sisi	36
Gambar 3.37 Graf $P_2 \odot S_2$ dengan Bobot Total Sisi.....	37
Gambar 3.38 Graf P_4	37
Gambar 3.39 Graf S_2	38

Gambar 3.40 Graf $P_4 \odot S_2$	38
Gambar 3.41 Graf $P_4 \odot S_2$ dengan Label Titik dan Sisi	38
Gambar 3.42 Graf $P_4 \odot S_2$ dengan Bobot Total Sisi	40
Gambar 3.43 Graf P_3	40
Gambar 3.44 Graf S_3	41
Gambar 3.45 Graf $P_3 \odot S_3$	41
Gambar 3.46 Graf $P_3 \odot S_3$ dengan Label Titik dan Sisi	41
Gambar 3.47 Graf $P_3 \odot S_3$ dengan Bobot Total Sisi	43
Gambar 3.48 Graf P_4	43
Gambar 3.49 Graf S_3	43
Gambar 3.50 Graf $P_4 \odot S_3$	44
Gambar 3.51 Graf $P_4 \odot S_3$ dengan Label Titik dan Sisi	44
Gambar 3.52 Graf $P_4 \odot S_3$ dengan Bobot Total Sisi	46
Gambar 3.53 Graf P_2	46
Gambar 3.54 Graf S_4	47
Gambar 3.55 Graf $P_2 \odot S_4$	47
Gambar 3.56 Graf $P_2 \odot S_4$ dengan Label Titik dan Sisi	48
Gambar 3.57 Graf $P_2 \odot S_4$ dengan Bobot Total Sisi	49
Gambar 3.58 Graf P_4	49
Gambar 3.59 Graf S_4	50
Gambar 3.60 Graf $P_4 \odot S_4$	50
Gambar 3.61 Graf $P_4 \odot S_4$ dengan Label Titik dan Sisi	51
Gambar 3.62 Graf $P_4 \odot S_4$ dengan Bobot Total Sisi	53
Gambar 3.63 Graf $DS(P_2 \odot S_2)$	59
Gambar 3.64 Graf $DS(P_2 \odot S_2)$ dengan Label Titik dan Sisi	60
Gambar 3.65 Graf $DS(P_2 \odot S_2)$ dengan Bobot Total Sisi	61
Gambar 3.66 Graf $DS(P_3 \odot S_2)$	62
Gambar 3.67 Graf $DS(P_3 \odot S_2)$ dengan Label Titik dan Sisi	62

Gambar 3.68 Graf $DS(P_3 \odot S_2)$ dengan Bobot Total Sisi.....	64
Gambar 3.69 Graf $DS(P_4 \odot S_2)$	65
Gambar 3.70 Graf $DS(P_4 \odot S_2)$ dengan Label Titik dan Sisi	66
Gambar 3.71 Graf $DS(P_4 \odot S_2)$ dengan Bobot Total Sisi.....	68

DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

G	: Graf
$V(G)$	: Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi pada Graf G
$\deg(v_n)$	: Derajat simpul n
w_u	: Bobot titik u
w_{uv}	: Bobot sisi uv
v_i	: Titik ke i
u_i^j	: Titik ke i salinan ke j
c_i	: Titik pusat ke i
uv	: Sisi yang menghubungkan titik u dan titik v
$ V(G) $	: Banyak titik pada graf G
$ E(G) $	: Banyak sisi pada graf G
P_n	: Graf lintasan dengan n titik
S_n	: Graf bintang dengan n titik
λ	: Fungsi
$\lambda(v)$	: Fungsi pelabelan titik
$\lambda(uv)$	: Fungsi pelabelan sisi yang menghubungkan titik u dan v
■	: Tanda akhir pembuktian
DS	: <i>Degree Splitting</i>

ABSTRAK

PELABELAN ANTI AJAIB PADA GRAF KORONA $P_n \odot S_m$ DAN GRAF *DEGREE SPLITTING* $DS(P_n \odot S_m)$

Oleh

Elde Mercyano Santoso

24010121130084

Diberikan sebuah graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan anti ajaib pada graf merupakan pemberian label unik pada setiap titik dan sisi dengan bilangan bulat dari 1 sampai n (jumlah elemen pada graf) sehingga bobot total pada setiap sisinya berbeda satu sama lain. Namun, tidak semua graf memiliki sifat anti ajaib, sehingga menarik untuk mengeksplorasi pelabelan anti ajaib pada berbagai kelas graf. Penelitian ini menganalisis pelabelan anti ajaib pada graf lintasan, graf bintang, graf korona $P_n \odot S_m$, dan graf *degree splitting* dari masing – masing graf yang diteliti. Dari hasil penelitian, diperoleh bahwa semua graf yang diteliti merupakan graf anti ajaib dengan rumus pelabelan yang berpola dan terstruktur.

Kata Kunci: Pelabelan, anti ajaib, graf lintasan, graf bintang, graf korona, *degree splitting*

ABSTRACT

ANTIMAGIC LABELING ON CORONA GRAPH $P_n \odot S_m$ AND DEGREE SPLITTING GRAPH $P_n \odot S_m$

By

Elde Mercyano Santoso

24010121130084

Given a graph G with a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. An antimagic labeling on a graph is the assignment of unique labels to each vertex and edge with integers from 1 to n (the number of elements in the graph) such that the total weight on each edge is different from one another. However, not all graphs have the antimagic property, making it interesting to explore antimagic labeling on various classes of graphs. This study analyzes antimagic labeling on path graphs, star graphs, corona graphs $P_n \odot S_m$, and degree splitting graphs of each graph under investigation. From the results of the study, it was found that the all the graphs that is researched are antimagic graphs with patterned and structured labeling formulas.

Keywords: Labeling, antimagic, path graph, star graph, corona graph, degree splitting

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini berisi pendahuluan yang mendasari penelitian, yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan yakni acuan dalam melakukan penulisan laporan

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang memiliki perkembangan pesat dan berperan penting dalam berbagai disiplin ilmu, seperti ilmu komputer, jaringan komunikasi, biologi, dan ilmu sosial. Graf digunakan untuk merepresentasikan berbagai struktur hubungan, seperti jaringan sosial, distribusi logistik, dan analisis data. Dalam pengembangan teori graf, salah satu konsep menarik yang banyak diteliti adalah pelabelan graf.

Salah satu jenis pelabelan yang menjadi perhatian dalam beberapa tahun terakhir adalah pelabelan anti ajaib. Pelabelan anti ajaib pada graf adalah pelabelan sisi dan titik dari graf menggunakan bilangan bulat positif yang berbeda sehingga label bobot total sisi pada setiap sisinya berbeda. Konsep ini dikembangkan sebagai variasi dari pelabelan ajaib yang lebih umum digunakan.

Penelitian ini fokus pada graf lintasan dan graf bintang. Graf lintasan adalah graf sederhana yang berbentuk rantai dengan simpul yang terhubung secara berurutan, sedangkan graf bintang terdiri dari satu simpul pusat yang terhubung ke beberapa simpul lainnya tanpa adanya hubungan langsung antar simpul-simpul tersebut.

Namun, dalam penerapan pelabelan anti ajaib pada graf lintasan dan bintang, terdapat tantangan dalam memastikan bahwa setiap sisi memiliki bobot sisi yang berbeda. Selain itu, dalam penelitian ini, modifikasi graf dilakukan dengan metode pemisahan derajat. Pemisahan derajat bertujuan untuk mengelompokkan

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya ini dipersembahkan untuk:

Saya

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “Pelabelan Anti Ajaib pada Graf Korona $P_n \odot S_m$ dan Graf *Degree Splitting* $DS(P_n \odot S_m)$ ” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.

Penyusunan Tugas Akhir ini tidak lepas dari bantuan, dukungan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si., selaku Ketua Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.
2. Bapak Dr. Moch. Fandi Ansori, S.Si., M.Si., selaku Koordinator Tugas Akhir Departemen Matematika.
3. Ibu Lucia Ratnasari, S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, bantuan, dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. Yusephus Decupertino, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, bantuan, dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Niswah Qonita, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Penguji yang telah bersedia menguji dan memberi masukan kepada penulis untuk menyempurnakan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa masih ada banyak kekurangan dalam Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menyempurnakan

Semarang, 13 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL LUAR	ii
HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
KATA PENGANTAR.....	iv
DAFTAR ISI	v
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN.....	xi
ABSTRAK.....	xii
ABSTRACT.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Penelitian.....	3
1.4 Tujuan Penulisan	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Metodologi Penelitian	3
1.7 Sistematika Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	5
2.1 Pengertian Graf	5
2.2 Jenis-jenis Graf.....	8
2.3 Pelabelan Graf.....	9

BAB III PEMBAHASAN	15
3.1 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf P_n dan S_m	17
3.2 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf <i>Degree Splitting</i> $DS(P_n)$ dan $DS(S_m)$	20
3.3 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf Korona $P_n \odot S_m$	31
3.4 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf Korona <i>Degree Splitting</i> $DS(P_n \odot S_m)$	53
BAB IV PENUTUP	70
4.1 Kesimpulan	70
DAFTAR PUSTAKA	71

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G_1	5
Gambar 2.2 Titik Bertetangga dan Sisi Bertetangga.....	6
Gambar 2.3 Graf G_2	6
Gambar 2.4 Graf Sederhana (a) Graf Ganda (b) Graf Semu (c)	8
Gambar 2.5 Graf P_2 dan P_3	9
Gambar 2.6 Graf S_4	9
Gambar 2.7 Fungsi Injektif	10
Gambar 2.8 Fungsi Surjektif.....	10
Gambar 2.9 Fungsi Bijektif.....	11
Gambar 2.10 Graf G_3	12
Gambar 2.11 Graf G_3 dengan Label Titik	12
Gambar 2.12 Graf G_3 dengan Label Sisi.....	13
Gambar 2.13 Graf G_3 dengan Label Titik dan Label Sisi	13
Gambar 2.14 Graf G_3 dengan Label Bobot Titik	14
Gambar 3.1 Graf G_4	15
Gambar 3.2 Graf G_4 denan Label Titik dan Sisi	16
Gambar 3.3 Graf G_4 dengan Label Total Sisi.....	16
Gambar 3.4 Graf P_5	17
Gambar 3.5 Graf P_5 dengan Label Titik dan Sisi.....	17
Gambar 3.6 Graf P_5 dengan Bobot Total Sisi	18
Gambar 3.7 Graf S_5	19
Gambar 3.8 Graf S_5 dengan Label Titik dan Sisi.....	19
Gambar 3.9 Graf S_5 dengan Bobot Total Sisi	20
Gambar 3.10 Graf G_5	21
Gambar 3.11 Graf $DS(G_5)$	21

Gambar 3.12 Graf P_n	21
Gambar 3.13 Graf $DS(P_n)$	22
Gambar 3.14 Graf S_n	22
Gambar 3.15 Graf $DS(S_n)$	23
Gambar 3.16 Graf $DS(P_2)$ dan Graf $DS(P_3)$	23
Gambar 3.17 Graf C_3	24
Gambar 3.18 Graf C_4	24
Gambar 3.19 Graf P_5	25
Gambar 3.20 Graf $DS(P_5)$	26
Gambar 3.21 Graf $DS(P_5)$ dengan Label Titik dan Sisi	26
Gambar 3.22 Graf $DS(P_5)$ dengan Bobot Total Sisi.....	27
Gambar 3.23 Graf S_4	29
Gambar 3.24 Graf $DS(S_4)$	29
Gambar 3.25 Graf $DS(S_4)$ dengan Label Titik dan Sisi	30
Gambar 3.26 Graf $DS(S_4)$ dengan Bobot Total Sisi.....	31
Gambar 3.27 Graf G_6	32
Gambar 3.28 Graf H	32
Gambar 3.29 Graf $G_6 \odot H$	32
Gambar 3.30 Graf P_n	33
Gambar 3.31 Graf S_m	33
Gambar 3.32 Graf $P_n \odot S_m$	33
Gambar 3.33 Graf P_2	35
Gambar 3.34 Graf S_2	35
Gambar 3.35 Graf $P_2 \odot S_2$	36
Gambar 3.36 Graf $P_2 \odot S_2$ dengan Label Titik dan Sisi	36
Gambar 3.37 Graf $P_2 \odot S_2$ dengan Bobot Total Sisi.....	37
Gambar 3.38 Graf P_4	37
Gambar 3.39 Graf S_2	38

Gambar 3.40 Graf $P_4 \odot S_2$	38
Gambar 3.41 Graf $P_4 \odot S_2$ dengan Label Titik dan Sisi	38
Gambar 3.42 Graf $P_4 \odot S_2$ dengan Bobot Total Sisi	40
Gambar 3.43 Graf P_3	40
Gambar 3.44 Graf S_3	41
Gambar 3.45 Graf $P_3 \odot S_3$	41
Gambar 3.46 Graf $P_3 \odot S_3$ dengan Label Titik dan Sisi	41
Gambar 3.47 Graf $P_3 \odot S_3$ dengan Bobot Total Sisi	43
Gambar 3.48 Graf P_4	43
Gambar 3.49 Graf S_3	43
Gambar 3.50 Graf $P_4 \odot S_3$	44
Gambar 3.51 Graf $P_4 \odot S_3$ dengan Label Titik dan Sisi	44
Gambar 3.52 Graf $P_4 \odot S_3$ dengan Bobot Total Sisi	46
Gambar 3.53 Graf P_2	46
Gambar 3.54 Graf S_4	47
Gambar 3.55 Graf $P_2 \odot S_4$	47
Gambar 3.56 Graf $P_2 \odot S_4$ dengan Label Titik dan Sisi	48
Gambar 3.57 Graf $P_2 \odot S_4$ dengan Bobot Total Sisi	49
Gambar 3.58 Graf P_4	49
Gambar 3.59 Graf S_4	50
Gambar 3.60 Graf $P_4 \odot S_4$	50
Gambar 3.61 Graf $P_4 \odot S_4$ dengan Label Titik dan Sisi	51
Gambar 3.62 Graf $P_4 \odot S_4$ dengan Bobot Total Sisi	53
Gambar 3.63 Graf $DS(P_2 \odot S_2)$	59
Gambar 3.64 Graf $DS(P_2 \odot S_2)$ dengan Label Titik dan Sisi	60
Gambar 3.65 Graf $DS(P_2 \odot S_2)$ dengan Bobot Total Sisi	61
Gambar 3.66 Graf $DS(P_3 \odot S_2)$	62
Gambar 3.67 Graf $DS(P_3 \odot S_2)$ dengan Label Titik dan Sisi	62

Gambar 3.68 Graf $DS(P_3 \odot S_2)$ dengan Bobot Total Sisi.....	64
Gambar 3.69 Graf $DS(P_4 \odot S_2)$	65
Gambar 3.70 Graf $DS(P_4 \odot S_2)$ dengan Label Titik dan Sisi	66
Gambar 3.71 Graf $DS(P_4 \odot S_2)$ dengan Bobot Total Sisi.....	68

DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

G	: Graf
$V(G)$	: Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi pada Graf G
$\deg(v_n)$	: Derajat simpul n
w_u	: Bobot titik u
w_{uv}	: Bobot sisi uv
v_i	: Titik ke i
u_i^j	: Titik ke i salinan ke j
c_i	: Titik pusat ke i
uv	: Sisi yang menghubungkan titik u dan titik v
$ V(G) $	: Banyak titik pada graf G
$ E(G) $	: Banyak sisi pada graf G
P_n	: Graf lintasan dengan n titik
S_n	: Graf bintang dengan n titik
λ	: Fungsi
$\lambda(v)$	: Fungsi pelabelan titik
$\lambda(uv)$	: Fungsi pelabelan sisi yang menghubungkan titik u dan v
■	: Tanda akhir pembuktian
DS	: <i>Degree Splitting</i>

ABSTRAK

PELABELAN ANTI AJAIB PADA GRAF KORONA $P_n \odot S_m$ DAN GRAF *DEGREE SPLITTING* $DS(P_n \odot S_m)$

Oleh

Elde Mercyano Santoso

24010121130084

Diberikan sebuah graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan anti ajaib pada graf merupakan pemberian label unik pada setiap titik dan sisi dengan bilangan bulat dari 1 sampai n (jumlah elemen pada graf) sehingga bobot total pada setiap sisinya berbeda satu sama lain. Namun, tidak semua graf memiliki sifat anti ajaib, sehingga menarik untuk mengeksplorasi pelabelan anti ajaib pada berbagai kelas graf. Penelitian ini menganalisis pelabelan anti ajaib pada graf lintasan, graf bintang, graf korona $P_n \odot S_m$, dan graf *degree splitting* dari masing – masing graf yang diteliti. Dari hasil penelitian, diperoleh bahwa semua graf yang diteliti merupakan graf anti ajaib dengan rumus pelabelan yang berpola dan terstruktur.

Kata Kunci: Pelabelan, anti ajaib, graf lintasan, graf bintang, graf korona, *degree splitting*

ABSTRACT

ANTIMAGIC LABELING ON CORONA GRAPH $P_n \odot S_m$ AND DEGREE SPLITTING GRAPH $P_n \odot S_m$

By

Elde Mercyano Santoso

24010121130084

Given a graph G with a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. An antimagic labeling on a graph is the assignment of unique labels to each vertex and edge with integers from 1 to n (the number of elements in the graph) such that the total weight on each edge is different from one another. However, not all graphs have the antimagic property, making it interesting to explore antimagic labeling on various classes of graphs. This study analyzes antimagic labeling on path graphs, star graphs, corona graphs $P_n \odot S_m$, and degree splitting graphs of each graph under investigation. From the results of the study, it was found that the all the graphs that is researched are antimagic graphs with patterned and structured labeling formulas.

Keywords: Labeling, antimagic, path graph, star graph, corona graph, degree splitting

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini berisi pendahuluan yang mendasari penelitian, yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan yakni acuan dalam melakukan penulisan laporan

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang memiliki perkembangan pesat dan berperan penting dalam berbagai disiplin ilmu, seperti ilmu komputer, jaringan komunikasi, biologi, dan ilmu sosial. Graf digunakan untuk merepresentasikan berbagai struktur hubungan, seperti jaringan sosial, distribusi logistik, dan analisis data. Dalam pengembangan teori graf, salah satu konsep menarik yang banyak diteliti adalah pelabelan graf.

Salah satu jenis pelabelan yang menjadi perhatian dalam beberapa tahun terakhir adalah pelabelan anti ajaib. Pelabelan anti ajaib pada graf adalah pelabelan sisi dan titik dari graf menggunakan bilangan bulat positif yang berbeda sehingga label bobot total sisi pada setiap sisinya berbeda. Konsep ini dikembangkan sebagai variasi dari pelabelan ajaib yang lebih umum digunakan.

Penelitian ini fokus pada graf lintasan dan graf bintang. Graf lintasan adalah graf sederhana yang berbentuk rantai dengan simpul yang terhubung secara berurutan, sedangkan graf bintang terdiri dari satu simpul pusat yang terhubung ke beberapa simpul lainnya tanpa adanya hubungan langsung antar simpul-simpul tersebut.

Namun, dalam penerapan pelabelan anti ajaib pada graf lintasan dan bintang, terdapat tantangan dalam memastikan bahwa setiap sisi memiliki bobot sisi yang berbeda. Selain itu, dalam penelitian ini, modifikasi graf dilakukan dengan metode pemisahan derajat. Pemisahan derajat bertujuan untuk mengelompokkan

titik berdasarkan jumlah sisi yang bersinggungan dengan titik tersebut, selanjutnya dibuat pola pelabelan agar graf tersebut dapat dikatakan sebagai graf anti ajaib.

Pelabelan anti ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990. Selanjutnya, pelabelan anti ajaib dibahas oleh Ari Dwiningsih dengan judul “Pelabelan *Antimagic* pada Graf Ular Segitiga, Graf Ular Segiempat, dan Modifikasi Graf Ular Segitiga”. Penelitian ini berkaitan dengan pelabelan anti ajaib pada graf yang dimodifikasi. Selain itu, Erina Tri Agustin juga telah membahas tentang pelabelan anti ajaib pada tugas akhirnya yang berjudul “Pelabelan *Graceful Antimagic* pada Beberapa Graf”. Barasara dan Prajapati juga membahas tentang pelabelan anti ajaib pada graf *degree splitting* di dalam jurnalnya yang berjudul “*Antimagic labeling of Some Degree Splitting Graph*”, hanya saja pelabelannya masih terbatas pada pelabelan sisi saja dan menghitung bobot pada titik. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk meneliti teori tentang pelabelan anti ajaib pada graf modifikasi lain yang lebih kompleks dengan tambahan operasi.

Sehingga tugas akhir dengan judul "Pelabelan Anti Ajaib pada Graf Korona $P_n \odot S_m$ dan Graf *Degree Splitting* $DS(P_n \odot S_m)$ " diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori graf, khususnya dalam kajian pelabelan anti ajaib, sekaligus menjadi referensi untuk penelitian lanjutan di masa depan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, rumusan masalah pada laporan tugas akhir ini yaitu:

1. Apakah graf lintasan dan graf bintang dapat dilabeli dengan pelabelan anti ajaib?
2. Apakah graf operasi korona dari graf lintasan dan graf bintang dapat dilabeli dengan pelabelan anti ajaib?
3. Apakah graf *degree splitting* operasi korona dari graf lintasan dan graf bintang dapat dilabeli dengan pelabelan anti ajaib?

1.3 Pembatasan Penelitian

Penelitian tugas akhir ini dibatasi pada graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian tugas akhir ini yaitu:

1. Menganalisis keberadaan pelabelan anti ajaib pada graf lintasan dan graf bintang dengan pemisahan derajat.
2. Mengidentifikasi karakteristik pelabelan anti ajaib pada kedua jenis graf tersebut.
3. Memberikan kontribusi teoritis terhadap pengembangan teori pelabelan graf, khususnya pelabelan anti ajaib, serta memberikan wawasan baru yang relevan bagi penelitian lanjutan.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian tugas akhir ini adalah:

1. Memperdalam pengetahuan terkait pelabelan graf, khususnya pelabelan anti ajaib pada graf lintasan dan graf bintang dengan pemisahan derajat.
2. Memberikan kontribusi untuk meningkatkan pemahaman tentang teori graf kepada peminat teori graf.

1.6 Metodologi Penelitian

Pada penyusunan tugas akhir ini, jenis penelitian yang digunakan adalah metode tinjauan pustaka (*study literature*). Oleh karena itu, bahan yang digunakan sebagai referensi utama yang dikaji ulang adalah artikel mengenai pelabelan anti ajaib untuk graf tertentu dan beberapa pustaka baik buku, *paper*, maupun jurnal yang dapat mendukung pembahasan.

Oleh karena itu, langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari penulisan sebagai berikut:

1. Mempelajari konsep dan pengertian pemisahan derajat pada graf dari buku- buku referensi, jurnal, paper, dan artikel yang memuat tentang pemisahan derajat pada graf.

ABSTRACT

ANTIMAGIC LABELING ON CORONA GRAPH $P_n \odot S_m$ AND DEGREE SPLITTING GRAPH $P_n \odot S_m$

By

Elde Mercyano Santoso

24010121130084

Given a graph G with a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. An antimagic labeling on a graph is the assignment of unique labels to each vertex and edge with integers from 1 to n (the number of elements in the graph) such that the total weight on each edge is different from one another. However, not all graphs have the antimagic property, making it interesting to explore antimagic labeling on various classes of graphs. This study analyzes antimagic labeling on path graphs, star graphs, corona graphs $P_n \odot S_m$, and degree splitting graphs of each graph under investigation. From the results of the study, it was found that the all the graphs that is researched are antimagic graphs with patterned and structured labeling formulas.

Keywords: Labeling, antimagic, path graph, star graph, corona graph, degree splitting

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini berisi pendahuluan yang mendasari penelitian, yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan yakni acuan dalam melakukan penulisan laporan

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang memiliki perkembangan pesat dan berperan penting dalam berbagai disiplin ilmu, seperti ilmu komputer, jaringan komunikasi, biologi, dan ilmu sosial. Graf digunakan untuk merepresentasikan berbagai struktur hubungan, seperti jaringan sosial, distribusi logistik, dan analisis data. Dalam pengembangan teori graf, salah satu konsep menarik yang banyak diteliti adalah pelabelan graf.

Salah satu jenis pelabelan yang menjadi perhatian dalam beberapa tahun terakhir adalah pelabelan anti ajaib. Pelabelan anti ajaib pada graf adalah pelabelan sisi dan titik dari graf menggunakan bilangan bulat positif yang berbeda sehingga label bobot total sisi pada setiap sisinya berbeda. Konsep ini dikembangkan sebagai variasi dari pelabelan ajaib yang lebih umum digunakan.

Penelitian ini fokus pada graf lintasan dan graf bintang. Graf lintasan adalah graf sederhana yang berbentuk rantai dengan simpul yang terhubung secara berurutan, sedangkan graf bintang terdiri dari satu simpul pusat yang terhubung ke beberapa simpul lainnya tanpa adanya hubungan langsung antar simpul-simpul tersebut.

Namun, dalam penerapan pelabelan anti ajaib pada graf lintasan dan bintang, terdapat tantangan dalam memastikan bahwa setiap sisi memiliki bobot sisi yang berbeda. Selain itu, dalam penelitian ini, modifikasi graf dilakukan dengan metode pemisahan derajat. Pemisahan derajat bertujuan untuk mengelompokkan

titik berdasarkan jumlah sisi yang bersinggungan dengan titik tersebut, selanjutnya dibuat pola pelabelan agar graf tersebut dapat dikatakan sebagai graf anti ajaib.

Pelabelan anti ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990. Selanjutnya, pelabelan anti ajaib dibahas oleh Ari Dwiningsih dengan judul “Pelabelan *Antimagic* pada Graf Ular Segitiga, Graf Ular Segiempat, dan Modifikasi Graf Ular Segitiga”. Penelitian ini berkaitan dengan pelabelan anti ajaib pada graf yang dimodifikasi. Selain itu, Erina Tri Agustin juga telah membahas tentang pelabelan anti ajaib pada tugas akhirnya yang berjudul “Pelabelan *Graceful Antimagic* pada Beberapa Graf”. Barasara dan Prajapati juga membahas tentang pelabelan anti ajaib pada graf *degree splitting* di dalam jurnalnya yang berjudul “*Antimagic labeling of Some Degree Splitting Graph*”, hanya saja pelabelannya masih terbatas pada pelabelan sisi saja dan menghitung bobot pada titik. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk meneliti teori tentang pelabelan anti ajaib pada graf modifikasi lain yang lebih kompleks dengan tambahan operasi.

Sehingga tugas akhir dengan judul "Pelabelan Anti Ajaib pada Graf Korona $P_n \odot S_m$ dan Graf *Degree Splitting* $DS(P_n \odot S_m)$ " diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori graf, khususnya dalam kajian pelabelan anti ajaib, sekaligus menjadi referensi untuk penelitian lanjutan di masa depan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, rumusan masalah pada laporan tugas akhir ini yaitu:

1. Apakah graf lintasan dan graf bintang dapat dilabeli dengan pelabelan anti ajaib?
2. Apakah graf operasi korona dari graf lintasan dan graf bintang dapat dilabeli dengan pelabelan anti ajaib?
3. Apakah graf *degree splitting* operasi korona dari graf lintasan dan graf bintang dapat dilabeli dengan pelabelan anti ajaib?

1.3 Pembatasan Penelitian

Penelitian tugas akhir ini dibatasi pada graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian tugas akhir ini yaitu:

1. Menganalisis keberadaan pelabelan anti ajaib pada graf lintasan dan graf bintang dengan pemisahan derajat.
2. Mengidentifikasi karakteristik pelabelan anti ajaib pada kedua jenis graf tersebut.
3. Memberikan kontribusi teoritis terhadap pengembangan teori pelabelan graf, khususnya pelabelan anti ajaib, serta memberikan wawasan baru yang relevan bagi penelitian lanjutan.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian tugas akhir ini adalah:

1. Memperdalam pengetahuan terkait pelabelan graf, khususnya pelabelan anti ajaib pada graf lintasan dan graf bintang dengan pemisahan derajat.
2. Memberikan kontribusi untuk meningkatkan pemahaman tentang teori graf kepada peminat teori graf.

1.6 Metodologi Penelitian

Pada penyusunan tugas akhir ini, jenis penelitian yang digunakan adalah metode tinjauan pustaka (*study literature*). Oleh karena itu, bahan yang digunakan sebagai referensi utama yang dikaji ulang adalah artikel mengenai pelabelan anti ajaib untuk graf tertentu dan beberapa pustaka baik buku, *paper*, maupun jurnal yang dapat mendukung pembahasan.

Oleh karena itu, langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari penulisan sebagai berikut:

1. Mempelajari konsep dan pengertian pemisahan derajat pada graf dari buku- buku referensi, jurnal, paper, dan artikel yang memuat tentang pemisahan derajat pada graf.

2. Mempelajari konsep dan pengertian pelabelan anti ajaib pada graf dari buku- buku referensi, jurnal, paper, dan artikel yang memuat tentang pelabelan anti ajaib pada graf.
3. Mengkaji definisi dan teorema pada artikel utama yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir.
4. Berdasarkan artikel yang dijadikan sebagai referensi utama, ditemukan sebuah teorema yang membahas mengenai pelabelan anti ajaib untuk graf lintasan dan graf bintang dengan pemisahan derajat. Selanjutnya, dilakukan analisis terhadap kemungkinan pemberian label anti ajaib untuk graf lintasan dan graf bintang dengan pemisahan derajat untuk membuktikan bahwa graf tersebut merupakan graf anti ajaib.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, sistematika penulisan bertujuan untuk memudahkan pemahaman pada penelitian. Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri atas tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian utama, dan bagian akhir. Bagian awal terdiri dari sampul luar, halaman judul, halaman pengesahan, halaman pernyataan, halaman persembahan, kata pengantar, daftar isi, daftar gambar, dan abstrak.

Bagian utama terdiri dari empat bab, yaitu pendahuluan, landasan teori, pembahasan, dan penutup. Bab I merupakan bab pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan. Bab II merupakan bab landasan teori yang terdiri dari teori-teori dasar tentang graf, pemisahan derajat pada graf, dan pelabelan anti ajaib yang dijadikan sebagai landasan dalam penyusunan tugas akhir ini. Bab III merupakan bab pembahasan yang berisi pembuktian pelabelan anti ajaib yang menjadi topik utama tugas akhir ini. Bab IV merupakan bab penutup yang terdiri dari kesimpulan hasil pembahasan dan saran mengenai tugas akhir ini. Bagian akhir dari penulisan tugas akhir ini terdiri dari daftar pustaka.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini menguraikan beberapa teori dasar yang bertujuan untuk mempermudah pemahaman dalam penjelasan mengenai pelabelan anti ajaib. Penjelasan ini mencakup berbagai konsep dasar, termasuk pengertian graf, fungsi, pelabelan graf dan pelabelan anti ajaib.

2.1 Pengertian Graf

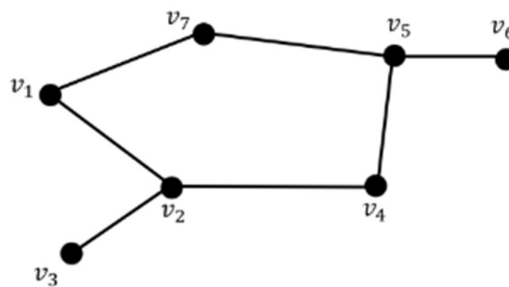
Pada subbab ini dijelaskan tentang pengertian graf dan unsur – unsur pembentuk graf.

Definisi 2.1 [2] *Graf G didefinisikan sebagai himpunan tak kosong dari titik-titik, bersama dengan keluarga pasangan tak terurut (mungkin kosong) dari pasangan titik yang disebut sisi. Himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, dan daftar sisi dari graf G dinotasikan dengan $E(G)$. Jika G tidak mempunyai sisi ($E(G)$ kosong), maka graf G disebut sebagai graf kosong.*

Contoh 2.1 Diberikan contoh graf G_1 yang memuat titik dan sisi sebagai berikut.

$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

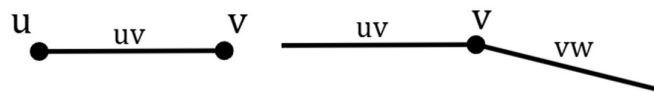
$$E(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_7, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_5v_7\}$$



Gambar 2.1 Graf G_1

Definisi 2.2 [2] Dua titik u dan v dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika terdapat sisi uv yang menghubungkan kedua titik tersebut, dan titik u dan v dikatakan *incident* (bersinggungan) dengan sisi uv . Dua sisi uv dan vw dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika terdapat titik v yang menghubungkan kedua sisi tersebut, dan sisi uv dan vw dikatakan *incident* (bersinggungan) dengan titik v .

Contoh 2.2 Diberikan contoh titik bertetangga dan sisi bertetangga sebagai berikut.

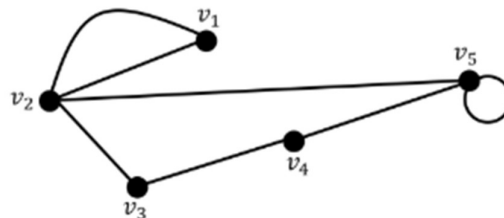


Gambar 2.2 Titik Bertetangga dan Sisi Bertetangga

Banyaknya titik dan sisi pada suatu graf dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.3 [2] Pada graf G , banyaknya titik pada graf G disebut sebagai *order* yang dinotasikan dengan $n(G)$ atau $|V(G)|$, dan banyaknya sisi pada graf G disebut sebagai *size* yang dinotasikan dengan $m(G)$ atau $|E(G)|$.

Contoh 2.3



Gambar 2.3 Graf G_2

Pada **Gambar 2.3**, Graf G_2 memiliki 5 titik dan 7 sisi sehingga graf G_2 mempunyai *order* 5 dan *size* 7. Dapat dinotasikan $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 7$.

Definisi 2.4 [2] Sebuah sisi yang menghubungkan satu titik ke titik itu sendiri disebut *loop*. Sedangkan dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama atau mempunyai titik akhir yang identik disebut *multiple edge*.

Contoh 2.4 Pada **Gambar 2.2**, terdapat titik v_5 yang mempunyai sisi yang menghubungkan v_5 dengan titik v_5 sendiri. Maka sisi v_5v_5 disebut *loop*.

Pada graf terdapat *walk* dan *trail* untuk mendapatkan suatu rute dari titik awal hingga titik akhir dan rutenya terurut dari sisi sisi yang bertetangga.

Definisi 2.5 [2] Pada graf G , sebuah *walk* dari titik awal v_0 (initial vertex) ke titik akhir v_n (final vertex) adalah urutan berhingga dengan suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi dalam bentuk $v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$ atau juga dapat dinotasikan dengan $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$, dan hanya ada satu sisi di antara dua titik yang berurutan. Jumlah sisi dalam sebuah *walk* disebut *length* (panjang jalan).

Contoh 2.5 Pada **Gambar 2.1**, graf G_1 dapat dicari *walk* dari titik awal v_1 menuju ke titik akhir v_7 sebagai berikut $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_4, v_4, v_4v_5, v_5, v_5v_6, v_6, v_6v_5, v_5, v_5v_7, v_7$ atau bisa dinotasikan $v_1, v_2, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6, v_5, v_7$ sehingga diperoleh *length* dari *walk* adalah 9.

Definisi 2.6 [2] *Trail* adalah *walk* dengan sisi yang tidak berulang, sementara *path* adalah *trail* tanpa titik berulang, kecuali mungkin titik awal dan titik akhir.

Contoh 2.6 Pada **Gambar 2.3**, graf G_2 , dapat diperoleh *trail* dari titik awal v_1 dan titik akhir v_5 pada graf G_2 yaitu $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_5, v_5$ karena mempunyai sisi berbeda. Barisan $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_5, v_5$ juga merupakan *path* dari titik awal v_1 dan titik akhir v_5 karena semua titiknya berbeda.

Derajat pada titik dalam graf merupakan banyaknya sisi yang bersinggungan dengan titik tersebut.

Definisi 2.7 [2] Misalkan v adalah titik dalam graf G . Derajat titik v , disimbolkan dengan $\deg(v)$ merupakan jumlah sisi yang bersinggungan terhadap titik v dengan setiap loop dihitung dua kali.

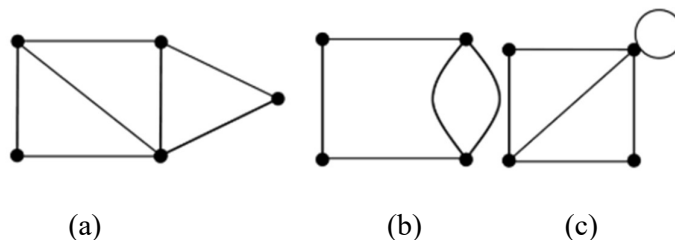
Contoh 2.7 Pada **Gambar 2.2**, graf G_2 mempunyai 5 titik yang masing – masing memiliki derajat yang dapat dihitung dengan melihat sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan titik lain. Derajat dari masing – masing titik disimbolkan dengan $\deg(v_n)$. Derajat masing - masing titik yang ada pada graf G_2 yaitu $\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 4$, $\deg(v_3) = 2$, $\deg(v_4) = 2$, $\deg(v_5) = 4$.

2.2 Jenis-jenis Graf

Pada subbab ini dijelaskan mengenai jenis - jenis graf secara umum dan graf yang akan digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 2.8 [2] graf yang tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi ganda disebut graf sederhana (simple graph). Graf yang memiliki sisi ganda disebut graf ganda (multigraph) dan graf yang memiliki loop disebut graf semu (pseudo graph).

Contoh 2.8 Diberikan contoh graf sederhana, graf ganda, dan graf semu sebagai berikut.

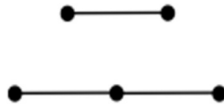


Gambar 2.4 Graf Sederhana (a) Graf Ganda (b) Graf Semu (c)

Selanjutnya, kata “graf” pada laporan tugas akhir ini, merujuk pada graf sederhana.

Definisi 2.9 [2] Graf lintasan adalah graf yang hanya memiliki 2 titik berderajat satu dan $n - 2$ titik berderajat dua, berlaku hanya untuk $n \geq 2$.

Contoh 2.9 Diberikan graf P_2 dan P_3 sebagai berikut.

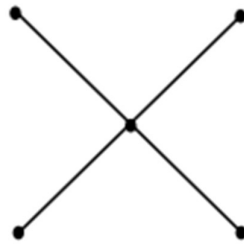


Gambar 2.5 Graf P_2 dan P_3

Definisi 2.10 [3] *Pendant merupakan titik yang hanya memiliki derajat 1.*

Definisi 2.11 [1] *Graf bintang S_n adalah graf yang dibangun dari satu titik pusat dengan menambahkan sejumlah n pendant pada titik pusat tersebut. Graf bintang memiliki $n + 1$ titik dan n sisi.*

Contoh 2.10 Diberikan graf S_4 sebagai berikut.



Gambar 2.6 Graf S_4

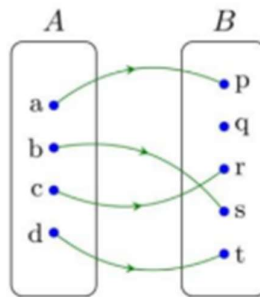
2.3 Pelabelan Graf

Subbab ini membahas tentang pengertian fungsi, jenis – jenis fungsi, pengertian pelabelan graf, dan jenis – jenis pelabelan graf.

Definisi 2.12 [3] *Misalkan A dan B adalah himpunan – himpunan tidak kosong. Pemetaan atau fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan setiap anggota dari himpunan A dengan tepat satu anggota di himpunan B yang kemudian dinotasikan dengan λ . Apabila λ adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan dengan $\lambda : A \rightarrow B$, maka himpunan A merupakan daerah asal (domain) dari λ dan himpunan B merupakan daerah kawan (kodomain) dari λ .*

Definisi 2.13 [4] Fungsi $\lambda : A \rightarrow B$ disebut fungsi satu – satu atau fungsi injektif jika untuk setiap $x_1 \in A$ dan $x_2 \in A$, dengan x_1 tidak sama dengan x_2 berlaku $\lambda(x_1)$ tidak sama dengan $\lambda(x_2)$. Dengan kata lain, bila $\lambda(x_1) = \lambda(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

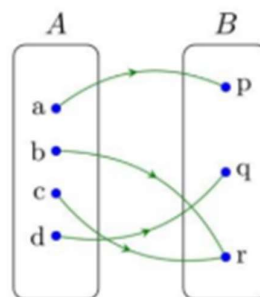
Contoh 2.11 Diberikan himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan $B = \{p, q, r, s, t\}$. Fungsi injektif ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 2.7 Fungsi injektif

Definisi 2.14 [4] Fungsi $\lambda : A \rightarrow B$ disebut fungsi pada, onto, atau fungsi surjektif, jika dan hanya jika untuk setiap $y \in B$ terdapat paling tidak satu x dalam domain A sehingga berlaku $\lambda(x) = y$. Dengan kata lain, daerah kawan (kodomain) fungsi surjektif sama dengan daerah hasil (range).

Contoh 2.12 Diberikan himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan $B = \{p, q, r\}$. Fungsi surjektif ditunjukkan sebagai berikut.

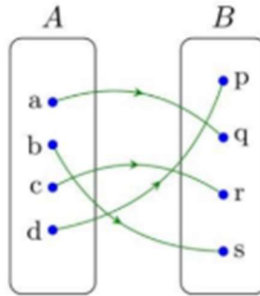


Gambar 2.8 Fungsi surjektif

Definisi 2.15 [4] Fungsi $\lambda : A \rightarrow B$ disebut korespondensi satu – satu atau bijektif jika dan hanya jika hanya fungsi λ adalah fungsi yang sekaligus injektif dan

surjektif. Dengan kata lain, untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga berlaku $\lambda(x) = y$, dan jika $\lambda(x_1) = \lambda(x_2)$, untuk $x_1, x_2 \in A$, maka $x_1 = x_2$.

Contoh 2.13 Diberikan himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan $B = \{p, q, r, s\}$. Fungsi injektif ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 2.9 Fungsi bijektif

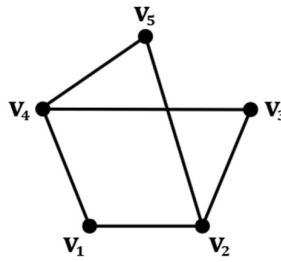
Definisi 2.16 [5] Pelabelan graf merupakan fungsi yang memasangkan elemen – elemen atau unsur – unsur pada graf ke anggota himpunan bagian bilangan bulat positif dengan keadaan tertentu.

Jika daerah asal dari fungsi merupakan himpunan titik maka disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika daerah asal dari fungsi merupakan himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika daerah asal dari fungsi merupakan himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan disebut pelabelan total (*total labeling*).

Contoh 2.14 Diberikan graf G_2 dengan himpunan titik dan sisinya adalah sebagai berikut.

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{v_1 v_2, v_1 v_4, v_2 v_3, v_2 v_5, v_3 v_4, v_4 v_5\}$$



Gambar 2.10 Graf G_3

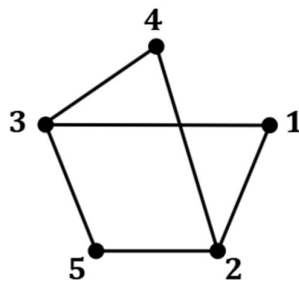
Misalkan label titik dari graf G_3 diberikan sebagai berikut:

$$\lambda(v_1) = 5 \quad \lambda(v_4) = 3$$

$$\lambda(v_2) = 2 \quad \lambda(v_5) = 4$$

$$\lambda(v_3) = 1$$

Sehingga pelabelan titik pada graf G_3 ditunjukkan pada **Gambar 2.10** berikut.



Gambar 2.11 Graf G_3 dengan Label Titik

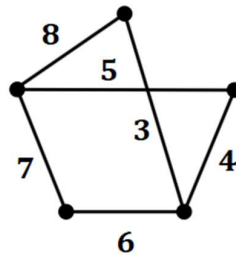
Misalkan label sisi dari graf G_3 diberikan sebagai berikut:

$$\lambda(v_1v_2) = 6 \quad \lambda(v_1v_4) = 7$$

$$\lambda(v_2v_3) = 4 \quad \lambda(v_2v_5) = 3$$

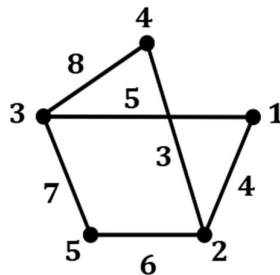
$$\lambda(v_3v_4) = 5 \quad \lambda(v_4v_5) = 8$$

Pelabelan sisi pada graf G_3 ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 2.12 Graf G_3 dengan Label Sisi

Berdasarkan perolehan pelabelan titik dan sisi yang sudah ditunjukkan pada **Gambar 2.11** dan **Gambar 2.12**, maka diperoleh pelabelan titik dan sisi sebagai berikut.



Gambar 2.13 Graf G_3 dengan Label Titik dan Label Sisi

Definisi 2.17 [2] *Bobot (weight) total dari titik adalah jumlah dari label sisi yang bersinggungan dengan titik tersebut. Sedangkan bobot dari sisi adalah jumlah dari label titik yang bersinggungan dengan sisi tersebut. Bobot untuk titik v_i dinotasikan dengan $wt(v_i)$, sedangkan bobot untuk sisi $v_i v_j$ dinotasikan dengan $wt(v_i v_j)$.*

Contoh 2.15 Berdasarkan pelabelan titik dan sisi pada **Gambar 2.12** dapat dicari bobot titik dari graf. Bobot titik $wt(v_i)$ dari **Gambar 2.12** adalah sebagai berikut.

$$wt(v_1) = 7 + 6 = 13$$

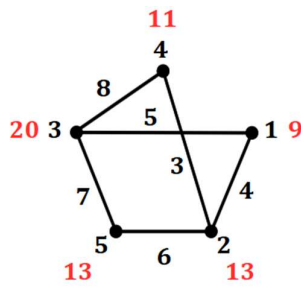
$$wt(v_2) = 6 + 3 + 4 = 13$$

$$wt(v_3) = 5 + 4 = 9$$

$$wt(v_4) = 8 + 7 + 5 = 20$$

$$wt(v_5) = 8 + 3 = 11$$

Bobot titik pada graf G_3 ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 2.14 Graf G_3 dengan Label Bobot Titik