

SKRIPSI

**STRATEGI PENGENDALIAN OPTIMAL UNTUK PENYAKIT
MENULAR TUBERKULOSIS MENGGUNAKAN TEORI
PERMAINAN DIFERENSIAL DAN MODEL SEIR**

***OPTIMAL CONTROL STRATEGIES FOR INFECTIOUS DISEASE
TUBERCULOSIS USING INTEGRATING DIFFERENTIAL GAME
THEORY AND SEIR MODEL***



Celia Salsabila
24010121140136

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG
2025**

SKRIPSI

**STRATEGI PENGENDALIAN OPTIMAL UNTUK PENYAKIT
MENULAR TUBERKULOSIS MENGGUNAKAN TEORI
PERMAINAN DIFERENSIAL DAN MODEL SEIR**

***OPTIMAL CONTROL STRATEGIES FOR INFECTIOUS DISEASE
TUBERCULOSIS USING INTEGRATING DIFFERENTIAL GAME
THEORY AND SEIR MODEL***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat Sarjana
Matematika (S.Mat.)



CELIA SALSABILA
24010121140136

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG
2025**

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

STRATEGI PENGENDALIAN OPTIMAL UNTUK PENYAKIT MENULAR TUBERKULOSIS MENGGUNAKAN TEORI PERMAINAN DIFERENSIAL DAN MODEL SEIR

Telah dipersiapkan dan disusun oleh:

CELIA SALSABILA

24010121140136

Telah dipertahankan dihadapan Tim Penguji
pada tanggal, 27 Mei 2025

Susunan Tim Penguji

Pembimbing II/Penguji,



Jovian Dian P. S. Mat., M. Mat.

NIP. 199708282024061002

Penguji,



Dr. Moch. Fandi Ansori S. Si., M. Si.

NIP. H.7.19940501202204100

Mengetahui,

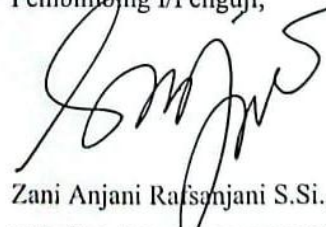
Ketua Departemen Matematika



Dr. Susilo Hariyanto, S. Si., M. Si.

NIP. 197410142000121001

Pembimbing I/Penguji,



Zani Anjani Rafsanjani S. Si., M. Sc.

NIP. H.7.199403062022102001

HALAMAN PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa Tugas Akhir ini tidak termuat karya yang sudah pernah diajukan sebelumnya untuk memperoleh gelar Sarjana di Perguruan Tinggi, dan sepengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, 20 Mei 2025

Celia Salsabila

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan dengan segenap cinta untuk:

Alm. Papa, yang meskipun telah tiada, namun doanya senantiasa mengiringi setiap langkah penulis.

Mama, Kakak, Berkah Family, serta keluarga besar di Padang yang tak henti menjadi sumber kekuatan dan semangat.

Namia, Dewi, Bima, Joko, Reja, Raghid, Richard, Asri, Zahra, Dita, serta pemilik NIM 24010121140164 dan 21020121140161, yang telah menemani perjalanan ini dengan tawa, doa, dan dukungan tanpa henti.

Dan kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan semangat, bantuan, dan keyakinan di saat penulis hampir menyerah.

Terima kasih.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul “*Strategi Pengendalian Optimal untuk Penyakit Menular Tuberkulosis menggunakan Teori Permainan Diferensial dan Model SEIR*” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.

Tugas akhir ini membahas tentang strategi pengendalian optimal terhadap penyebaran penyakit menular tuberkulosis menggunakan pendekatan model SEIR yang telah dimodifikasi dan teori permainan diferensial. Analisis dilakukan untuk menentukan strategi terbaik menggunakan *Nash Equilibrium* antara otoritas kesehatan dan individu dalam meminimalkan jumlah infeksi dan biaya yang dikeluarkan. Untuk menganalisis kestabilan dari kedua titik kesetimbangan, ditentukan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM) dengan bantuan perangkat lunak Matlab. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik untuk menggambarkan model dan mengevaluasi pengaruh pengobatan serta kepatuhan individu terhadap pengendalian penyebaran tuberkulosis.

Tanpa adanya dukungan dari berbagai pihak, Tugas Akhir ini tidak akan dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Kusworo Adi, S.Si., M.T., selaku Dekan Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.
2. Bapak Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si., selaku ketua departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.
3. Ibu Zani Anjani Rafsanjani S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu, memberikan bimbingan dan arahan dalam pembuatan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Jovian Dian P. S.Mat., M.Mat., selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu, memberikan bimbingan dan arahan dalam pembuatan Tugas

Akhir ini

5. Serta semua pihak yang telah memberikan bantuan, dukungan, dan motivasi secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih jauh dari kata sempurna dan masih banyak yang harus dibenahi. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Semarang, 20 Mei 2025

Celia Salsabila

DAFTAR ISI

HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
DAFTAR ARTI LAMBANG	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Pembatasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan dan Manfaat.....	3
1.5 Metodologi Penulisan	3
1.6 Metodologi Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	5
2.1 Tuberkulosis	5
2.2 Persamaan Diferensial	6
2.3 Sistem Persamaan Diferensial	8
2.3.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier	9
2.3.2 Sistem Persamaan Diferensial Non Linier	10
2.4 Faktor Integrasi (<i>Integrating Factor</i>)	10
2.5 Titik Keseimbangan (<i>Equilibrium Point</i>).....	13
2.6 Bilangan Reproduksi Dasar	14
2.7 Metode Lyapunov.....	15
2.8 Teori Permainan	16
2.8.1 <i>Nash Equilibrium</i>	16
2.8.2 Metode Hamilton Jacobi Bellman (HJB).....	17

2.8.3 Iterasi Picard	18
BAB III PEMBAHASAN	19
3.1 Model Matematika dari Penyakit Tuberkulosis.....	19
3.2 Formulasi Model.....	20
3.3 Menentukan Kepositifan dan Keterbatasan Solusi	23
3.4 Titik Keseimbangan.....	26
3.4.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	27
3.4.2 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	28
3.4.3 Titik Keseimbangan Penyakit Endemik.....	30
3.5 Analisis Kestabilan	31
3.5.1 Kestabilan Global pada Titik Keseimbangan Bebas Penyakit....	32
3.5.2 Kestabilan Global pada Titik Keseimbangan Endemik	33
3.6 <i>Nash Equilibrium</i>	35
3.6.1 Metode Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)	36
3.7 Metode Iterasi Picard.....	37
3.8 Simulasi Numerik	51
3.8.1 Simulasi Numerik Model SEIR Tanpa Kontrol	54
3.8.2 Simulasi Numerik Keseimbangan Bebas Penyakit Tuberkulosis	55
3.8.3 Simulasi Numerik Keseimbangan Endemik	57
3.8.4 Simulasi Numerik Pengaruh Penyelenggaraan Vaksinasi pada Populasi Terinfeksi.	59
3.8.5 Simulasi Numerik Pengaruh Kepatuhan Individu Terhadap Pengobatan pada Populasi Terinfeksi.	60
3.8.6 Simulasi Numerik untuk menentukan nilai minimum $u_i + 1$ dan $v_i + 1$	62
BAB IV PENUTUP	63
DAFTAR PUSTAKA	64
LAMPIRAN	67

DAFTAR TABEL

Tabel 3. 1 Variabel pada Model Tuberkulosis	22
Tabel 3. 2 Perhitungan Parameter	52
Tabel 3. 3 Parameter pada Model Tuberkulosis Termodifikasi	53

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1 Model SEIR pada penyakit COVID-19 oleh [7].	19
Gambar 3. 2 Model SEIR penyakit Tuberkulosis yang telah dimodifikasi.....	21
Gambar 3. 3 Model SEIR Tanpa Kontrol u dan v	54
Gambar 3. 4 Grafik Simulasi Kasus Non-endemik	56
Gambar 3. 5 Grafik Simulasi Kasus Endemik Penyakit.....	58
Gambar 3. 6 Grafik Pengaruh Penyuluhan pada Populasi Terinfeksi	59
Gambar 3. 7 Grafik Pengaruh Kepatuhan Individu terhadap Pengobatan	61

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A. Kode Matlab.....	67
-------------------------------------	-----------

DAFTAR ARTI LAMBANG

E	: <i>Exposed</i> atau individu terpapar infeksi.
I	: <i>Infected</i> atau individu terinfeksi.
R	: <i>Recovery</i> individu sembuh.
S	: <i>Susceptible</i> atau individu rentan infeksi.
u	: Tindakan yang dilakukan otoritas kesehatan untuk mengurangi penyebaran penyakit.
v	: Upaya yang dilakukan individu untuk mengurangi risiko tertular penyakit.
$\dot{V}_{DFE}$	: Titik kesetimbangan non endemik.
$\dot{V}_{EE}$	: Titik kesetimbangan endemik.
$1 - u$	: Bilangan fraksi untuk populasi yang tidak terlindungi oleh otoritas kesehatan.
β	: Laju kontak individu terinfeksi.
C_1	: Koefisien biaya untuk otoritas kesehatan.
C_2	: Koefisien biaya untuk individu.
η	: Laju reaktivasi laten.
ε	: Laju perkembangan individu terpapar menjadi terinfeksi.
μ	: Laju kelahiran/kematian alami.
$\mathcal{R}_0$	: Bilangan reproduksi dasar.

ABSTRAK

STRATEGI PENGENDALIAN OPTIMAL UNTUK PENYAKIT MENULAR TUBERKULOSIS MENGGUNAKAN TEORI PERMAINAN DIFERENSIAL DAN MODEL SEIR

Oleh

CELIA SALSABILA

24010121140136

Tuberkulosis (TB) merupakan salah satu penyakit menular yang masih menjadi masalah kesehatan global, termasuk di Indonesia yang tercatat sebagai negara dengan jumlah kasus TB terbanyak kedua di dunia. Tingginya angka infeksi menunjukkan perlunya strategi pengendalian yang efektif untuk menekan penyebaran penyakit ini. Penelitian ini mengembangkan model SEIR dengan pendekatan teori permainan diferensial guna menganalisis strategi optimal dalam pengendalian TB melalui intervensi otoritas kesehatan dan kepatuhan individu terhadap pengobatan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa jika bilangan reproduksi dasar $\mathcal{R}_0 > 1$, penyakit tetap bertahan dalam populasi, sedangkan $\mathcal{R}_0 < 1$ menandakan infeksi dapat dikendalikan. Peningkatan cakupan penyuluhan dan kepatuhan individu terhadap pengobatan secara signifikan menurunkan jumlah individu yang terinfeksi dan mempercepat pencapaian kesetimbangan bebas penyakit. Dari aspek ekonomi, diperlukan dana minimal 2,14 miliar rupiah untuk intervensi kesehatan dan 315 ribu rupiah per individu untuk tindakan pencegahan dalam satu tahun.

Kata kunci: Tuberkulosis, Model SEIR, Teori Permainan Diferensial, Pengendalian Optimal, Simulasi Numerik, Indonesia.

ABSTRACT

OPTIMAL CONTROL STRATEGIES FOR INFECTIOUS DISEASE TUBERCULOSIS USING INTEGRATING DIFFERENTIAL GAME THEORY AND SEIR MODEL

by

CELIA SALSABILA

24010121140136

Tuberculosis (TB) remains one of the most significant infectious diseases globally, with Indonesia ranked as the country with the second highest number of TB cases in the world. The high infection rate highlights the urgent need for effective control strategies to reduce disease transmission. This study develops an SEIR model using a differential game approach to analyze optimal strategies for TB control through government intervention and individual adherence to treatment. Simulation results indicate that when the basic reproduction number $R_0 < 1$, the disease can be controlled in the population, whereas $R_0 > 1$ implies that the infection can be will persist. Increasing counseling effort, along with improved individual compliance with treatment, significantly reduces the number of infected individuals and accelerates the achievement of a disease free equilibrium. From an economic perspective, a minimum of 2.14 billion rupiah is required for public health interventions, and 315 thousand rupiah per individual for preventive measures within one year.

Key Words: Tuberculosis, SEIR Model, Differential Game Theory, Optimal Control, Numerical Simulation, Indonesia.