ISSN: 0854-0675 *Jurnal Sains dan Matematika* Vol. 22 (3): 61-66 (2014)
Journal homepage: http://ejournal.undip.ac.id/index.php/sm

Solving a system of linear equations by QR Factorization Method for Temperature and Altitude Regression Model against Spontaneous-Potential

Widowati[1,*], Agus Setyawan[2], Mustafid[3], Muh. Nur[2], Sudarno[3], Udi Harmoko[2], Satriyo Adhy[4], Gunawan S[3], Agus Subagio[2], Heru Tjahjana[1], Ririn Sulpiani[1], Djalal Er Riyanto[4], Suhartono[4], Moch. A. Mukid[3], Jatmiko E. Suseno[2].

[1]Mathematics Department, Faculty of Sciences and Mathematics, Diponegoro University, Jl. Prof Soedharto SH Tembalang Semarang, [2]Physics Department, Faculty of Sciences and Mathematics, Diponegoro University, [3]Statistics Department, Faculty of Sciences and Mathematics, Diponegoro, [4]Informatics Department, Faculty of Sciences and Mathematics, Diponegoro University
*corresponding author's email: widowatimath@undip.ac.id

ABSTRACT

Many real problems can be represented in the form of multiple linear regression equation. One of those is the relationship between the variables of temperature and altitude of the spontaneous-potential. In order to determine the parameters of the regression equation, the least squares method was used. From here, there was obtained the system of linear equations. In this paper, to solve systems of linear equations, the exact method was used as the exact solution is certainly better than the approached solution. The method used was the QR factorization method. At the QR factorization, the system of linear equations was written in form of matrix equation. Then, the coefficient matrix which the number of rows is *m* and number of columns is *n* with linearly independent columns was factored into the matrix Q which has the same size with the matrix A, with orthonormal columns and matrix R was upper triangular. Furthermore, by backward substitution, it could be obtained the exact solution of linear equation system. As verification of this proposed method, a case study was given using data of temperature, altitude, and spontaneous-potential in the geothermal manifestations area, Gedongsongo, Mount Ungaran Semarang. From here, it was obtained the parameters of exact multiple linear regression model which states the relationship between temperature and altitude toward the spontaneous-potential.

Keywords: SPL, QR factorization, temperature, spontaneous-potential

ABSTRAK

Banyak permasalahan nyata yang dapat direpresentasikan dalam bentuk persamaan regresi linear ganda. Salah satunya adalah hubungan antara variabel suhu dan ketinggian terhadap spontaneous-potensial. Dalam rangka menentukan parameter dari persamaan regresi tersebut digunakan metode kuadrat terkecil. Dari sini diperoleh sistem persamaan linear. Pada paper ini, untuk menyelesaikan sistem persamaan linear digunakan metode eksak karena solusi eksak tentu lebih baik daripada solusi pendekatan. Metode yang digunakan adalah metode faktorisasi QR. Pada faktorisasi QR, sistem persamaan linear dituliskan daam bentuk persamaan matriks. Kemudian, matriks koefisien yang banyaknya baris *m* dan banyaknya kolom *n* dengan kolom-kolomnya bebas linear difaktorkan menjadi matriks Q yang berukuran sama dengan matriks A, dengan kolom-kolomnya ortonormal dan matriks R yang merupakan matriks segitiga atas. Selanjutnya, dengan substitusi mundur dapat diperoleh solusi eksak dari sistem persamaan linear. Sebagai verifikasi dari metode yang telah dikemukakan, diberikan studi kasus dengan menggunakan data suhu, ketinggian, dan spontaneous-potensial pada kawasan manifestasi panas bumi Gedongsongo, Gunung Ungaran Semarang. Dari sini diperoleh parameter dari model regresi linear ganda secara eksak yang mana persamaan regresi tersebut menyatakan hubungan antara suhu dan ketinggian terhadap spontaneous-potensial.

Kata kunci: SPL, Faktorisasi QR, suhu, spontaneous-potensial

ISSN: 0854-0675 *Jurnal Sains dan Matematika* Vol. 22 (3): 61-66 (2014)
Journal homepage: http://ejournal.undip.ac.id/index.php/sm

Pendahuluan

Salah satu sumber energi alternatif adalah energi panas bumi. Manifestasi panas bumi, muncul di kawasan **Gedong Songo**, Gunung Ungaran, tepatnya di Candi Gedongsongo, Dusun Darum, Desa Candi, Kecamatan Ambarawa, Kabupaten Semarang. Manifestasi panas bumi di kawasan Gedhong Songo tersebut, sangat menarik untuk diteliti lebih lanjut. Penelitian di manifestasi panas bumi Gedhong Songo Bandungan telah dilakukan dengan mengambil data suhu, ketinggian, dan spontaneous-potensial. Data ini digunakan untuk karakterisasi panas bumi di kawasan tersebut.

Penelitian untuk eksplorasi potensi panas bumi dengan menggunakan metode spontaneous-potensial telah dilakukan oleh beberapa peneliti [1, 2]. Aliran fluida muncul ke permukaan sebagai manifestasi panas bumi, seperti fumarol, daerah alterasi, dan air panas [2]. Selanjutnya, Mannington, *et.al.* [3] dan Susanti [4] telah mengkaji tentang pemodelan sistem panas bumi, masing-masing melalui pemodelan komputasi dan berdasarkan data geofisika.

Pada penelitian ini akan dikemukakan secara matematis hubungan suhu dan ketinggian terhadap spontaneous-potensial dengan data yang diperoleh dari kawasan manifestasi panasbumi di daerah Gedhong Songo melalui model regresi, khususnya pada bagaimana cara menentukan parameter-parameter pada persamaan regresi linear ganda. Dalam proses penentuan parameter regresi digunakan metode kuadrat terkecil yang menghasilkan Sistem Persamaan Linear (SPL). Disini akan dikaji bagaimana menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut. Sistem persamaan linear dapat dicari pemecahannya dengan beberapa metode baik dengan metode eksak (langsung) maupun dengan metode pendekatan (metode iterasi). Metode iterasi yang sering digunakan antara lain metode iterasi Gauss atau Jacobi, metode iterasi Gauss-Seidel, dan metode relaxasi. Pada paper ini, untuk menyelesaikan SPL digunakan metode eksak yang dapat dilakukan secara analitik. Dalam hal ini, dipilih metode eksak karena solusi eksak tentu lebih baik daripada solusi pendekatan. Metode yang akan digunakan adalah metode faktorisasi QR.

Tinjauan Pustaka

Sistem Persamaan Linear

Persamaan linear merupakan suatu persamaan dengan variabel yang terlibat berderajat paling tinggi satu. Apabila terdapat persamaan linear maka sekumpulan persamaan linear tersebut dinamakan sistem persamaan linier. Suatu pasangan beberapa bilangan merupakan solusi dari SPL bila pasangan tersebut secara simultan memenuhi kebenaran masing-masing persamaan dari SPL tersebut [5]. Sistem persamaan linear yang terdiri dari m buah persamaan linear dengan n buah variabel $x_1, \dots, x_n$ mempunyai bentuk umum

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Sistem ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

Pada persamaan (2), matriks A disebut matriks koefisien, X adalah vektor dengan komponen variabel $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, dan B adalah vektor dengan komponen variabel $[b_1, b_2, \dots, b_n]$. Sistem persamaan linear tersebut dapat dicari penyelesaiannya secara eksak (analitik) dengan menggunakan metode faktorisasi QR.

Metode Faktorisasi QR

Berikut diberikan definisi yang menjadi konsep dari metode faktorisasi QR.

Definisi 2.1 [4]

Diberikan matriks A yang berukuran m x n dengan kolom-kolomnya bebas linier, maka A dapat difaktorkan sebagai A= QR, dengan Q adalah matriks m x n dengan kolom-kolomnya ortonormal dan R adalah matriks segitiga atas berukuran n x n.

ISSN: 0854-0675 *Jurnal Sains dan Matematika* Vol. 22 (3): 61-66 (2014)
Journal homepage: http://ejournal.undip.ac.id/index.php/sm

Misalkan vektor-vektor kolom dari A adalah $u_{1,}u_2, \dots, u_n$dan vektor-vektor kolom ortonormal dari Q adalah $q_{1,}q_2, \dots, q_n$ [6] sehingga,

$A = [u_1|u_2| \dots |u_n]$ dan $Q = [q_1|q_2| \dots |q_n]$

$u_{1,}u_2, \dots, u_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk vektor-vektor $q_{1,}q_2, \dots, q_n$ sebagai

$$u_1 = \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \dots + \langle u_1, q_n\rangle q_n$$
$$u_1 = \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \dots + \langle u_1, q_n\rangle q_n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$u_1 = \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \dots + \langle u_1, q_n\rangle q_n$$

Vektor kolom ke-j dari sebuah hasil kali matriks adalah sebuah kombinasi linier dari vektor-vektor kolom faktor pertamanya dengan koefisien-koefisien yang diturunkan dari kolom ke-j faktor keduanya, selanjutnya hubungan ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$[u_1|u_2| \dots |u_n] = [q_1|q_2| \dots |q_n] \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \cdots & \langle u_n, q_1\rangle \\ \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & \cdots & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_1, q_n\rangle & \langle u_2, q_n\rangle & \cdots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix}$$

Secara lebih ringkas dapat dituliskan dalam bentuk seperti di bawah ini

$$A = QR \tag{3}$$

Akan tetapi, sifat proses Gramn-Schmidt menggariskan bahwa untuk $j \geq 2$, vektor q_j ortogonal terhadap $u_{1,}u_2, \dots, u_{j-1;}$ sehingga, semua entri yang terletak dibawah diagonal utama R adalah nol,

$$R = \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \cdots & \langle u_n, q_1\rangle \\ \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & \cdots & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix}$$

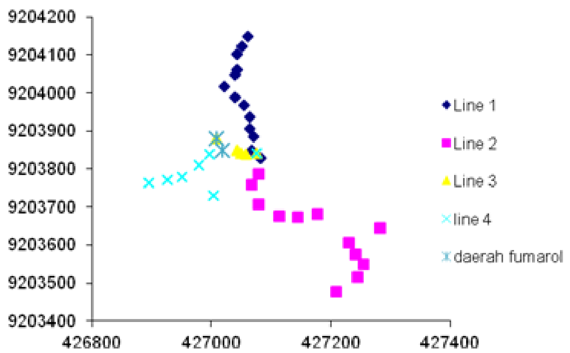
Sehingga diperoleh matriks R yang merupakan matriks segitiga atas.

Metode Penelitian

Penelitian dilakukan di kawasan manifestasi panasbumi di Gedhongsongo, sisi Selatan Gunung Ungaran Semarang, Jawa Tengah, seperti diberikan pada Gambar 1. berikut.

Gambar 1. Peta daerah pengukuran suhu permukaan dangkal dan spontaneous-potensial, tanda ● adalah titik pengukuran [8].

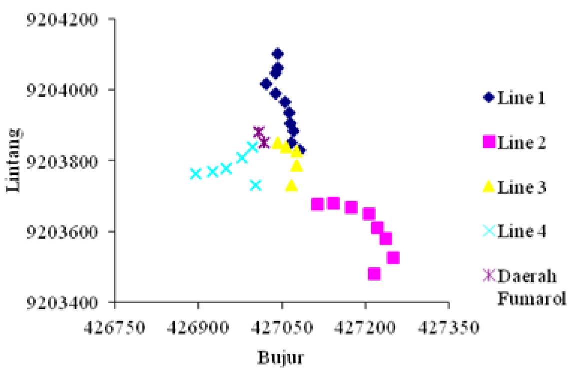
Pengambilan data spontaneous-potensial pada ketinggian tertentu dilakukan dengan menggunakan metode potential ampilitude. Pada metode potential ampilitude, satu elektroda ditempatkan pada suatu tempat sebagai base, sedangkan elektroda yang lain dipindahkan dengan jarak tertentu sepanjang jalur yang akan diukur. Tabung porous pot yang terhubung ke multimeter digital dimasukan ke dalam lubang pengukuran. Kedalaman lubang tersebut ± 10cm. Data spontaneous-potensial diukur di setiap interval jarak 30 meter mulai dari base.



Gambar 2. Titik-titik pengukuran spontaneous-potensial [8]

Kemudian, dilakukan pengambilan data suhu permukaan dangkal. Lubang yang digunakan sama dengan lubang pengambilan data spontaneous-potensial permukaan yaitu pada kedalaman 75 cm – 100 cm dari permukaan. Sensor suhu *termocouple* digunakan untuk pengukuran suhu ini.

ISSN: 0854-0675 *Jurnal Sains dan Matematika* Vol. 22 (3): 61-66 (2014)
Journal homepage: http://ejournal.undip.ac.id/index.php/sm



Gambar 3. Titik-titik pengukuran suhu [8]

Selanjutnya, data suhu, ketinggian, dan spontaneous-potensial yang diperoleh dikaji hubungannya secara matematis melalui model regresi linear ganda. Dalam hal ini ditekankan pada proses pencarian parameter dari persamaan regresi yang direpresentasikan dalam bentuk sistem persamaan linear yang diselesaikan dengan menggunakan metode faktorisasi QR.

Hasil dan Pembahasan

Hubungan Suhu dan Ketinggian terhadap Spontaneous-Potensial

Berdasarkan data suhu permukaan dangkal, ketinggian, dan spontaneous-potensial yang telah diperoleh [7], akan dikaji hubungannya secara matematik dengan menggunakan model regresi linear ganda. Dalam hal ini didefinisikan sebagai variabel bebas (x) adalah suhu dan ketinggian, sedangkan sebagai variabel tak bebasnya (y) adalah spontaneous-potensial. Diasumsikan syarat-syarat pengujian terhadap model [3] melalui uji normalitas, linearitas, heterokedastisitas, non autokolinieritas, dan non autokorelasi telah terpenuhi.

Misalkan dari pengukuran sampel diperoleh data $\{y_i, x_{1i}, x_{2i}\}$4untuk $i = 1,..., n$, yang mana y_i merupakan data spontaneous-potensial, x_{1i} merupakan data suhu, dan x_{2i} merupakan data ketinggian, maka penaksir model regresi linear gandanya dapat direpresentasikan

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Parameter b_0, b_1, b_2 dicari dengan menggunakan metode kuadrat terkecil sehingga diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\sum_{1=1}^{n} 1.b_0 + \sum_{1=1}^{n} x_{1i}.b_1 + \sum_{1=1}^{n} x_{2i}.b_2 = \sum_{1=1}^{n} y_i ,$$

$$\sum_{1=1}^{n} x_{1i}.b_0 + \sum_{1=1}^{n} x_{1i}^2.b_1 + \sum_{1=1}^{n} x_{1i}x_{2i}.b_2 = \sum_{1=1}^{n} x_{1i}y_i ,$$

$$\sum_{1=1}^{n} x_{2i}.b_0 + \sum_{1=1}^{n} x_{2i}x_{1i}.b_1 + \sum_{1=1}^{n} x_{2i}x_{2i}.b_2 = \sum_{1=1}^{n} x_{2i}y_i .$$

Selanjutnya, dengan menggunakan software SPSS dengan banyaknya data sampel (n = 12) diperoleh sistem persamaan linier (SPL) sebagai berikut.

$$12b_0 + 461{,}3100b_1 + 16577b_2 = 887{,}1456$$

$$461{,}3100b_0 + 22724{,}2859b + 636098{,}2100b_2 = 40910{,}1146$$

$$16577b_0 + 636098{,}2100b_1 + 22902527b_2 = 1222382{,}7050 \qquad (4)$$

Faktorisasi QR untuk Menentukan Parameter Persamaan Regresi

Kemudian, metode faktorisasi QR digunakan untuk mencari parameter b_0, b_1, dan b_2, untuk itu persamaan (4) dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 12 & 461{,}3100 & 16577 \\ 461{,}3100 & 22724{,}2859 & 636098{,}2100 \\ 16577 & 636098{,}2100 & 22902527 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 887{,}1456 \\ 40910{,}1146 \\ 1222382{,}7050 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan SPL dengan menggunakan metode Faktorisasi QR adalah seperti di bawah ini,

1. Membentuk martiks A menjadi matriks Q dan matriks R, misalkan persamaan (5) di atas ditulis dengan persamaan matriks $AZ = B$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 461{,}3100 & 16577 \\ 461{,}3100 & 22724{,}2859 & 636098{,}2100 \\ 16577 & 636098{,}2100 & 22902527 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 887{,}1456 \\ 40910{,}1146 \\ 1222382{,}7050 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, memfaktorkan matriks A menjadi matriks Q dan matriks R dapat dilakukan dengan proses Gramm-Schmidt pada sistem persamaan linier sehingga matriks A terbentuk menjadi matriks Q (matriks ortogonal) dan matriks R (matriks segitiga atas).

2. Diperoleh matriks Q dan matriks R setelah dilakukan perhitungan dengan program Matlab R2008a seperti berikut

$$Q = \begin{bmatrix} -0{,}0007 & -0{,}0001 & -1{,}0000 \\ -0{,}0280 & -0{,}9996 & 0{,}0002 \\ -0{,}9996 & 0{,}0280 & 0{,}0007 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$R = \begin{bmatrix} -0{,}0017x\ 10^7 & -0.0641x\ 10^7 & -2{,}2911x\ 10^7 \\ 0 & -0{,}0005x\ 10^7 & 0{,}0001x\ 10^7 \\ 0 & 0 & 0{,}0000x\ 10^7 \end{bmatrix}$$

3. Kemudian untuk memperoleh nilai S dengan persamaan $S = Q'B$

$$\begin{bmatrix} -0{,}0007 & -0{,}0001 & -1{,}0000 \\ -0{,}0280 & -0{,}9996 & 0{,}0002 \\ -0{,}9996 & 0{,}0280 & 0{,}0007 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 887{,}1456 \\ 41054{,}4700 \\ 1222383 \end{bmatrix}$$

Lakukan substitusi maju sehingga diperoleh,

$$s_1 = -1{,}2231x\ 10^6$$
$$s_2 = -0{,}0068x\ 10^6$$
$$s_3 = -0{,}0000x\ 10^6$$

atau dapat ditulis

$$S = \begin{bmatrix} -1{,}2231x\ 10^6 \\ -0{,}0068x\ 10^6 \\ -0{,}0000x\ 10^6 \end{bmatrix}$$

4. Selanjutnya mencari nilai parameter dengan persamaan $RZ = S$,

$$\begin{bmatrix} -0{,}0017x\ 10^7 & -0.0636x\ 10^7 & -2{,}2911x\ 10^7 \\ 0 & -0{,}0005x\ 10^7 & 0{,}0001x\ 10^7 \\ 0 & 0 & 0{,}0000x\ 10^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}2230x\ 10^6 \\ -0{,}0069x\ 10^6 \\ -0{,}0000x\ 10^6 \end{bmatrix}$$

Lakukan substitusi mundur sehingga diperoleh,

$$b_0 = 878{,}7685$$
$$b_1 = 1{,}2201$$
$$b_2 = -0{,}6166$$

atau dapat ditulis

$$Z = \begin{bmatrix} 905{,}7188 \\ 1{,}2329 \\ -0{,}6367 \end{bmatrix}$$

Dari sini diperoleh persamaan regresi yang parameter-parameternya dicari dengan menggunakan metode Faktorisasi QR adalah sebagai berikut,

$$y = 878{,}7685 + 1{,}2201x_1 - 0{,}6166x_2$$

Model regresi tersebut merepresentasikan hubungan antara suhu dan ketinggian terhadap spontaneous-potensial. Dari persamaan regresi yang diperoleh mengindikasikan bahwa kenaikan nilai suhu akan mengakibatkan kenaikan nilai spontaneous-potensial, sedangkan nilai spontaneous-potensial akan mengalami penurunan apabila nilai ketinggian mengalami kenaikan. Hal ini apabila dikaitkan dengan kondisi lapangan di kawasan manifestasi panasbumi yang diteliti merupakan daerah dengan *permeable* tinggi yang mana pada daerah tersebut terdapat fumarol.

Kesimpulan

Metode faktorisasi QR telah digunakan untuk menentukan solusi eksak dari sistem persamaan linear, yang mana solusi tersebut secara simultan memenuhi SPL. Solusi eksak (analitik) dipandang lebih baik daripada solusi pendekatan. Berdasarkan studi kasus dengan menggunakan data spontaneous potensial, suhu, dan ketinggian dari kawasan manifestasi panas bumi Gedhong Songo Ungaran, Semarang, diperoleh sistem persamaan linear. Solusi dari sistem persamaan linear tersebut merupakan parameter dari model regresi linear ganda yang merepresentasikan hubungan antara spontaneous potensial dengan suhu dan ketinggian Dari model regresi yang diperoleh menunjukkan bahwa apabila suhunya meningkat akan mengakibatkan spontaneous potensial potensial juga meningkat, namun hal sebaliknya terjadi untuk hubungan ketinggian dengan spontaneous potensial. Hal ini mengindikasikan bahwa kawasan manifestasi panasbumi yang diteliti merupakan daerah dengan *permeable* tinggi yang mana pada daerah tersebut terdapat fumarol.

Ucapan Terima Kasih

Paper ini merupakan bagian dari hasil Penelitian Penulis berdasarkan surat perjanjian kontrak penelitian No. 1395A/UN7.3.8/Pl/2013 tanggal 1 Mei 2013. Terima kasih kami sampaikan kepada Dekan FMIPA Universitas Diponegoro yang telah mendukung penelitian ini.

Daftar Pustaka

[1] Fritjof Fagerlund, Graham Heinson, (2003), *Detecting subsurface groundwater flow in fractured rock using self-potential (SP) methods,*

Environmental Geology, 43 (7), 782-794 10.1007/s00254-002-0693-x

[2] Agus Setyawan, Sachio Ehara, Yasuhiro Fujimitsu, Hakim Saibi, (2009), *Assessment of Geothermal Potential at Ungaran Volcano, Indonesia Deduced from Numerical Analysis*, Proceedings 34th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, California, USA,

[3] Warren Mannington, Michael O'Sullivan, David Bullivant, (2004), *Computer modelling of the Wairakei–Tauhara geothermal system, New Zealand*, Geothermics, 33 (4), 401-419 http://dx.doi.org/10.1016/j.geothermics.2003.09.009

[4] Nova Susanti, (2011), Pemodelan sistem Panasbumi Pincara Kabupaten Luwu Utara Sulawesi Selatan Berdasarkan Data Geofisika, in, Universitas Indonesia, Depok.

[5] Sumanang Muhtar Gozali, (2011), *Aljabar Linear*, in, Universitas Pendidikan Indonesia.

[6] Howard Anton, Chris Rorres, (2005), *Aljabar Linear Elementer*, 8 ed., Penerbit Erlangga, Jakarta

[7] Widowati, Agus Setyawan, Mustafid, Muhammad Nur, Sudarno, Udi Harmoko, Satriyo, Gunawan, Agus Subagio, Heru Tjahjana, Djalal Er Riyanto, Suhartono, Moch A. Mukid, Jatmiko Endro Suseno, (2013), *Pemodelan Matematika dan Analisa Sebaran Suhu Permukaan Serta Kandungan Kimia untuk Karakterisasi Panabumi di Gedongsongo, Gunung Ungaran, Semarang, Jawa Tengah*, in: Laporan Penelitian, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang.