

## SOLUSI DARI MODEL DINAMIK INTERAKSI PERTUMBUHAN IKAN BANDENG DAN UDANG WINDU

Ririn Sulpiani<sup>1</sup>, Widowati<sup>2</sup>, Sapto P. Putro<sup>3</sup>, Sunarsih<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro

<sup>3</sup> Jurusan Biologi Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro

Email :<sup>1</sup>ririnsulpiani@gmail.com

**Abstrak.** Pada paper ini akan dikembangkan model dinamik dari pertumbuhan ikan bandeng dan udang windu. Model dinamik pertumbuhan ikan bandeng dan udang windu dipengaruhi oleh model pertumbuhan massa. Model ini dikembangkan berdasarkan pada populasi dari masing-masing spesies. Model pertumbuhan ini merupakan populasi dua spesies pada sistem polikultur. Dari model pertumbuhan akan dicari solusi dengan menggunakan nilai eigen untuk mengetahui kestabilan sistem dan dianalisis untuk mengetahui sifat dari solusi kesetimbangan. Solusi dari sistem dinamik diperoleh berbentuk eksponensial.

**Keywords:** Model dinamik, ikan bandeng, udang windu, massa.

### 1. PENDAHULUAN

Indonesia merupakan negara kepulauan terbesar didunia dijuluki Negara maritim dengan luas 5,8 juta kilometer persegi (km) atau 2/3 luas wilayah Republik Indonesia (RI) dan panjang pantai sekitar 95.181 km. Berdasarkan data statistik perikanan budidaya tahun 2012, hanya sekitar 30 persen dari total produksi adalah komoditas ikan dan udang, sedangkan 70 persen lainnya adalah produksi rumput laut [1]. Dibutuhkan cara peningkatan komoditas ikan dan udang yang masih rendah maka sistem budidaya polikultur menjadi pilihan. Teknik budidaya telah berkembang, mulai dari budidaya sistem monokultur maupun sistem polikultur dengan sistem keramba jaring apung (KJA) dan keramba jaring apung bertingkat (KJAB), namun maraknya budidaya menyebabkan penurunan kualitas lingkungan [2].

Banyak peneliti telah membahas teknik budidaya pada KJA. penelitian mengenai prospek pengembangan usaha budidaya ikan mas dalam jaring apung sistem monokultur di Danau Toba Kabupaten Toba Samosir, Sumatera Utara mengenai analisis keuntungan usaha, kelayakan finansial dan Sensitivitas [3]; penelitian membuat desain investasi usaha

pembesaran ikan kolam jaring apung sistem monokultur dengan studi kasus pada KJA Batuhapur, Waduk Cirata, Kabupaten Cianjur, Jawa Barat [4]. Disamping itu penelitian mengenai model pemanenan logistik untuk pemanenan ikan dengan laju pemanenan proposional [5]; model persamaan logistik sederhana, model ini dikembangkan dengan memperhatikan parameter daya dukung (*carrying capacity*) yang bergantung pada waktu untuk menentukan fungsi panen yang proposional [6]; model dinamis dari pertumbuhan biomassa rumput laut, model dinamis dikembangkan dari model logistik sederhana dengan mempertimbangkan pengaruh penyerapan sumber daya ekosistem yang mendukung lingkungan [7]; Namun belum ada yang membahas model dinamik populasi dua spesies pada sistem polikultur, Bertolak dari pemikiran tersebut, maka pembahasan dalam penelitian ini dititik beratkan pada model dinamik ikan bandeng dan udang windu sehingga diharapkan dapat diperoleh tentang analisa kestabilan dan kesinambungan dan dapat ditentukan pola pertumbuhan sehingga dapat membantu masyarakat dalam menentukan produksi yang maksimal.

## 2. MODEL SISTEM DINAMIK

### 2.1 Model dinamik populasi dua spesies

Pandang ekosistem laut dengan dua spesies yang masing-masing populasinya  $N_1$  dan  $N_2$ . Diasumsikan bahwa perubahan laju pertumbuhan dari masing-masing spesies bukan dari faktor lingkungan. Model umum untuk interaksi dua spesies sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= g(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= f(N_1, N_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Diasumsikan tidak ada migrasi dari masing-masing spesies, sehingga

$$g(0, N_2) = 0 \text{ dan } f(N_1, 0) = 0.$$

Masalah nilai awal dapat ditentukan dari solusi persamaan (2.1) yang memenuhi nilai awal yang diberikan,  $N_1(t_0)$  dan  $N_2(t_0)$ .

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{f(N_1, N_2)}{g(N_1, N_2)} \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan persamaan bidang fase. Solusi dari persamaan (2.2) akan memberikan trayektori dari populasi. Selanjutnya, populasi kesetimbangan didefinisikan sebagai satu kemungkinan populasi dari kedua spesies sedemikian sehingga kedua populasi tidak akan berubah terhadap waktu. Kelahiran dan kematian dari spesies  $N_1$  harus setimbang, demikian juga dengan  $N_2$ .

Misalkan populasi kesetimbangan,

$$N_1 = N_{1e} \text{ dan } N_2 = N_{2e}$$

Sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} f(N_{1e}, N_{2e}) &= 0 \\ g(N_{1e}, N_{2e}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Merupakan dua persamaan dengan dua variabel.

Untuk suatu populasi kesetimbangan, kemiringan atau slope dari diagram bidang fase adalah tak terdefinisi

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{0}{0}$$

Yang disebut sebagai titik singular dari bidang fase. Titik singular dari persamaan bidang fase adalah ekuivalen dengan titik

kesetimbangan dari persamaan (2.1), selanjutnya akan dianalisis kestabilan linier.

### 2.2 Analisis Kestabilan dan solusi dari populasi kesetimbangan dua spesies

Akan dianalisis kestabilan dari populasi kesetimbangan. Perilaku populasi disekitar titik kesetimbangan secara umum dapat dideskripsikan oleh sistem persamaan differensial linier koefisien konstan berikut.

$$\frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2 \quad (2.4)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = cN_1 + dN_2 \quad (2.5)$$

Dengan  $a, b, c$  dan  $d$  adalah konstanta real, dan  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ . Sistem (2.4) dan (2.5) dikaji kestabilannya. Pada sistem ini  $N_1$  dan  $N_2$  merupakan *displacement* dari populasi kesetimbangan.

Kemudian titik kesetimbangan dari sistem persamaan differensial (2.4) dan (2.5) dapat dicari dengan mendapatkan solusi penyelesaian ( $N_1, N_2$ ) dari sistem berikut

$$\frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = cN_1 + dN_2 = 0 \quad (2.7)$$

Sehingga diperoleh penyelesaiannya adalah  $(0,0)$  yang merupakan titik kesetimbangan tunggal dari persamaan (2.4) dan (2.5) dan penyelesaian dari persamaan (2.4) dan (2.5) yaitu

$$N_1 = Ae^{\lambda t} \quad (2.8)$$

$$N_2 = Be^{\lambda t} \quad (2.9)$$

Untuk menentukan jenis ketabilan dari titik kesetimbangan, maka sistem persamaan differensial (2.4) dan (2.5) dibentuk persamaan karakteristik dan diperoleh akar-akar persamaan karakteristik. Dari sistem persamaan (2.5) diperoleh

$$N_1 = \frac{1}{c} \frac{dN_2}{dt} - \frac{d}{c} N_2 \quad (2.10)$$

Kemudian disubstitusikan pada  $\frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2$ , diperoleh

$$\frac{1}{c} \frac{d^2 N_2}{dt^2} - \frac{d}{c} N_2 = a \left( \frac{1}{c} \frac{dN_2}{dt} - \frac{d}{c} N_2 \right) + bN_2 \quad (2.11)$$

Atau dapat ditulis

$$\frac{d^2 N_2}{dt^2} - (a + d) \frac{dN_2}{dt} + (ad - bc)N_2 \quad (2.12)$$

Untuk memperoleh persamaan karakteristik dari PD (2.12) dimisalkan  $N_2 = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda$  adalah konstanta yang dicari.

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \frac{d^2 N_2}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (2.13)$$

Substitusikan persamaan (2.13) ke (2.12) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.14)$$

Persamaan (3.4) bisa disebut sebagai persamaan polinomial karakteristik. Dengan mendefinisikan  $p = a + d$ ,  $q = ad - bc$  dan  $\Delta = p^2 - 4q$ , maka diperoleh akar-akar karakteristik sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (2.15)$$

Solusi Umum dari sistem persamaan differensial (2.4) dan (2.5) adalah

$$N_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.16)$$

$$N_1 = C_1 \frac{\lambda_1 - d}{c} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2 - d}{c} e^{\lambda_2 t} \quad (2.17)$$

dengan  $C_1$  dan  $C_2$  adalah suatu konstanta. Selanjutnya akan dicari akar karakteristik dari persamaan tersebut, akar karakteristik ini juga sering disebut dengan nilai eigen. Beberapa jenis akar-akar karaktereistik, yaitu

1. Akar-akar real dan berbeda untuk  $\Delta > 0$
2. Akar-akar real dan sama untuk  $\Delta = 0$
3. Akar-akar kompleks konjugat untuk  $\Delta < 0$

Jika semua bagian real dari nilai eigen  $\leq 0$ , maka sistem stabil, apabila terdapat bagian real dari nilai eigen  $> 0$  maka sistem tidak stabil.

### 3. HASIL SIMULASI

Penelitian pertumbuhan ikan bandeng dan udang windu dilakukan di perairan Teluk Avarang, Kabupaten Barru, Sulawesi Selatan . Ikan bandeng dan udang

windu dipelihara dalam KJA heksagonal bertingkat sistem polikultur . Ikan bandeng dipelihara selama periode 6 bulan dan tiap bulannya diamati pertambahan bobot tubuhnya. Sedangkan udang windu dipelihara selama periode 22 minggu dan diamati pertambahan bobot tubuhnya, pengukuran dilakukan setiap 2 mingguan [9]. Dari data berat maka diperoleh parameter-parameter dari model sistem dinamik.

Model umum untuk interaksi dua spesies, yang masing-masing populasinya  $N_1$  adalah ikan bandeng dan  $N_2$  adalah udang windu, model sebagai berikut [8]:

$$\frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2 \quad (3.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = cN_1 + dN_2 \quad (3.2)$$

Persamaan (3.1) dan (3.2) merupakan model dinamik dua spesies. Data yang digunakan berdasarkan [9], dengan menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh  $a = 0.0999$ ,  $b = 0.0015$ ,  $c = 0.0594$ , dan  $d = 0.6789$ .

Sehingga diperoleh model sistem sebagai berikut :

$$\frac{dN_1}{dt} = 0.0999N_1 + 0.0015N_2 \quad (3.3)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 0.0594N_1 + 0.6789N_2 \quad (3.4)$$

Selanjutnya titik kesetimbangan dari sistem (3.3) dan (3.4) dapat dicari dengan mendapatkan solusi penyelesaian  $(N_1, N_2)$  dari sitem berikut :

$$\frac{dN_1}{dt} = 0.0999N_1 + 0.0015N_2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 0.0594N_1 + 0.6789N_2 = 0 \quad (3.6)$$

Kemudian dianalisis kestabilan dari populasi kesetimbangan. Perilaku populasi disekitar titik kesetimbangan secara umum dapat dideskripsikan oleh sistem persamaan differensial linier koefisien konstan.

Untuk menentukan jenis kestabilan dari titik kesetimbangan, maka sistem persamaan differensial (3.3) dan (3.4)

dibentuk kepersamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (0.0999 + 0.6789)\lambda \\ + (0.0999 \times 0.6789 \\ - 0.0015 \times 0.0594) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dari hasil perhitungan diperoleh nilai eigen dari sistem dua persamaan yaitu  $\lambda_1 = 0.0998$  dan  $\lambda_2 = 0.6791$  karena akar-akar karakteristik keduanya bernilai real, berbeda dan tanda (keduanya positif), maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik simpul (*node*) dan titik simpul ini tidak stabil.

Selanjutnya solusi dari sistem (3.3) dan (3.4) dengan  $\lambda_1 = 0.0998$  dan  $\lambda_2 = 0.6791$  diperoleh,

$$N_2 = C_1 e^{0.0998t} + C_2 e^{0.6791t} \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.8) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} = 0.0998C_1 e^{0.0998t} \\ + 0.6791C_2 e^{0.6791t} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substitusikan persamaan (3.8) dan (3.9) ke persamaan dibawah ini

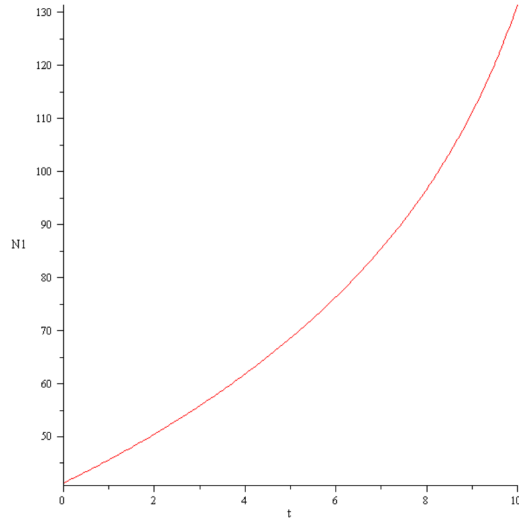
$$N_1 = C_1 \frac{\lambda_1 - d}{c} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2 - d}{c} e^{\lambda_2 t}$$

Sehingga diperoleh

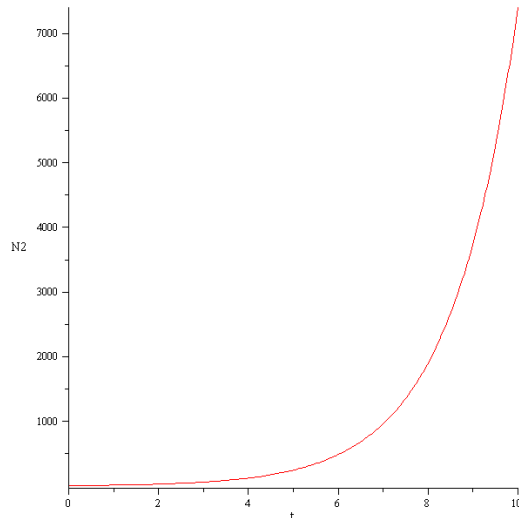
$$\begin{aligned} N_1 \\ = C_1 \frac{0.0998 - 0.6789}{0.0594} e^{0.0998t} \\ + C_2 \frac{0.6791 - 0.6789}{0.0594} e^{0.6791t} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dengan  $C_1$  dan  $C_2$  adalah konstanta sebarang.

Dari solusi yang dihasilkan dapat digambarkan grafik yang menyatakan pertumbuhan ikan bandeng dan udang windu terhadap waktu seperti yang terlihat pada gambar dibawah ini,



Gambar 3.1 Plot solusi pertumbuhan ikan bandeng terhadap waktu



Gambar 3.2 Plot solusi pertumbuhan ikan bandeng terhadap waktu

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tentang model dinamik populasi dua spesies yaitu ikan bandeng dan udang windu dapat disimpulkan bahwa akar karakteristik keduanya bernilai real, berbeda dan tanda (keduanya positif), maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik simpul (*node*) dan titik simpul ini tidak stabil. Dan diperoleh solusi dari sistem dinamik berbentuk eksponensial, hal ini juga dapat dilihat dari bentuk kurva pertumbuhan terhadap waktu.

## **5. DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Direktorat Jenderal Perikanan Budidaya, Kementerian Kelautan dan Perikanan, 2013.
- [2] Putro, S. P., Widowati., and Suhartana. 2015. Assessment Level of Severity of Environmental Disturbance Caused by Aquaculture Activities Using Abundance-Biomass Curves of Macroenthic Assemblages. *International Journal of Environmental Science and Development*, Vol. 6, No. 3, March 2015.
- [3] Gultom, 2002. Prospek Pengembangan Usaha Budidaya Ikan Mas Dalam Jaring Apung di Danau Toba, Desa Pasar Pangurusan, Kabupaten Toba Samosir. Skripsi. Fakultas Perikanan dan Ilmu Kelautan. IPB (tidak dipublikasikan). Bogor.
- [4] Mulana, A. B. 2003. Analisis Kelayakan Usahatani Pembesaran dan Pemasaran Ikan Nila Gift Budidaya Keramba Jaring Apung, Desa Cikidang Bayabang, Kecamatan Mande, Kabupaten Cianjur, Jawa Barat. Skripsi. Fakultas Pertanian IPB (tidak dipublikasikan). Bogor.
- [5] Sigit Nova Riyanto dan Kartono. 2006. Model Pemanenan Logistik untuk Pemanenan Ikan dengan Laju Pemanenan Proposional. Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang
- [6] Fitria Rakhmawati dan Sutimin. 2006. Model Pemanenan Logistik dengan Daya dukung Bergantung Waktu pada Budidaya Rumput Laut. *Prosiding SPMIPA*; pp: 43-49; 2006.
- [7] Zullaikah dan sutimin .2008. Model Pertumbuhan Biomassa Rumput Laut *Gracillaria* dengan Carrying Capacity Bergantung Waktu . *Jurnal Matematika* Vol. 11, No.2, Agustus 2008: 78-86.
- [8] Widowati dan Sutimin. 2013. *Pemodelan Matematika Analisis dan Aplikasinya*. Semarang : UNDIP Press.
- [9] Sudaryono, A., Putro, S.P., Suminto, dan Asmi Citra Malina. 2014. Pengembangan Teknik Budidaya, Diversifikasi Produk, Dan Pengelolaan Lingkungan Sektor Perikanan Budidaya Untuk Mendukung Ketahanan Pangan Nasional. Laporan Akhir Tahun 2 Penelitian Prioritas Nasional Masterplan Percepatan Dan Perluasan Pembangunan Pembangunan Ekonomi Indonesia 2011 – 2025 (Penprinas MP3EI 2011-2025). Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Universitas Diponegoro, Semarang.
-