MODEL DINAMIK DENGAN KONTROL PADA POPULASI PENDERITA DIABETES MELITUS

Anindita Henindya P.[1], Kartono[2], Sunarsih[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro

Abstract. In this paper is discussed the optimal control problem of a population model of diabetes mellitus. Model of diabetes mellitus population illustrates the flow of development a person suffering diabetes mellitus from pre-diabetes stage, diabetes without complications stage, diabetes with complications stage, until recovered stage. Optimal control aims to minimize the number of diabetics without complications, and the number of diabetics with complications through the implementation of the treatment control (u_1) and glucose diet therapy (u_2). Moreover, the goal of optimal control is also to minimize the cost of treatment and diet therapy glucose. Optimal control is obtained by applying Pontryagin minimum principle. Optimal control which is obtained from the calculation then simulated to see the effect of the treatment control and glucose diet therapy which is given.
Keywords: Optimal Control, Diabetes Mellitus, Pontryagin Minimum Principle.

1. Pendahuluan

Diabetes melitus diketahui sebagai suatu penyakit yang disebabkan oleh adanya gangguan menahun terutama pada sistem metabolisme karbohidrat, lemak, dan juga protein dalam tubuh. Gangguan metabolisme tersebut disebabkan kurangnya hormon insulin yang diperlukan dalam proses pengubahan gula menjadi tenaga serta sintesis lemak. Kondisi yang demikian itu mengakibatkan terjadinya hiperglikemia, yaitu meningkatnya kadar gula dalam darah atau terdapatnya kandungan gula dalam air kencing dan zat-zat keton serta asam yang berlebihan [1].

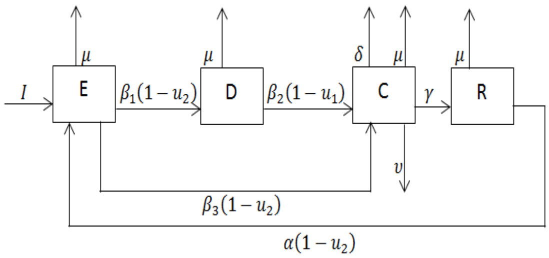
Berdasarkan laporan terakhir dari IDF, lebih dari 370 juta orang di seluruh dunia menderita diabetes (8.5% dari populasi orang dewasa) dan hampir 300 juta orang dalam tahap pra diabetes (6.5% dari populasi orang dewasa). Akibatnya, beban sosial-ekonomi diabetes sangat besar dengan hampir lima juta kematian dan lebih dari $470 miliar dihabiskan untuk pemeliharaan kesehatan pada tahun 2012 [2]. Asosiasi diabetes Amerika memperkirakan bahwa biaya pengobatan tahunan untuk penderita diabetes adalah 5 kali lebih banyak daripada orang tanpa diabetes. Penelitian lain memperkirakan bahwa biaya pengobatan untuk penderita diabetes dengan komplikasi adalah 2-5 kali lebih tinggi daripada untuk penderita diabetes tanpa komplikasi [2]. Beban biaya diabetes tersebut dapat dikurangi dengan mengendalikan jumlah individu penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi.

Model matematika tentang banyaknya populasi penderita diabetes melitus telah dikemukakan oleh Boutayeb, A. [2]. Model tersebut memperhatikan perkembangan diabetes dari taraf pra diabetes sampai pada taraf tanpa komplikasi dan taraf komplikasi. Selanjutnya, Boutayeb, A. [2] membentuk model kontrol optimal yang bertujuan untuk mengendalikan banyaknya individu penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi dengan menerapkan satu perlakuan kontrol. Berdasarkan model yang telah dibentuk oleh Boutayeb, A., dalam makalah ini dikembangkan bentuk model dinamik dengan kontrol pada populasi penderita diabetes melitus.

Model yang dibentuk memperhatikan perkembangan diabetes dari tahap pra diabetes ke tahap diabetes tanpa komplikasi, tahap diabetes dengan komplikasi dan kemudian sampai ke tahap sembuh. Pengontrolan diabetes dilakukan dengan dua upaya yaitu pengobatan dan terapi diet glukosa. Tujuan dari model yang dibentuk adalah untuk mendapatkan hasil kontrol yang optimal dengan menerapkan prinsip minimum Pontryagin serta melakukan simulasi numerik untuk melihat kerja pengobatan dan terapi diet glukosa dalam mengendalikan banyaknya penderita diabetes dengan komplikasi dan tanpa komplikasi.

2. Model Dinamik dengan Kontrol pada Populasi Penderita Diabetes Melitus

Model dinamik dengan kontrol pada populasi penderita diabetes melitus dapat dikonstruksi dengan memperhatikan skema perpindahan antar kelas sebagai berikut:



Gambar 1. Skema perpindahan antar kelas pada model dinamik dengan kontrol pada populasi penderita diabetes mellitus

dari Gambar 1, modelnya adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= I - \big(\mu + (\beta_3 + \beta_1)(1-u_2)\big)E \\
&\quad +\alpha(1-u_2)R \\
\frac{dD}{dt} &= \beta_1(1-u_2)E - \big(\mu + \beta_2(1-u_1)\big)D \\
\frac{dC}{dt} &= \beta_3(1-u_2)E + \beta_2(1-u_1)D \\
&\quad -(\mu+\gamma+\upsilon+\delta)C \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma C - \big(\mu + \alpha(1-u_2)\big)R
\end{aligned} \tag{1}$$

dengan

E = banyaknya individu pra diabetes.

D = banyaknya individu yang menderita diabetes tanpa komplikasi.

C = banyaknya individu yang menderita diabetes dengan komplikasi.

R = banyaknya individu yang telah sembuh dari penyakit diabetes dengan komplikasi.

I = kasus baru diabetes mellitus.

μ = laju kematian alami

γ = laju komplikasi yang disembuhkan

υ = laju penderita diabetes dengan komplikasi menjadi cacat

δ = laju kematian akibat komplikasi

β_1 = peluang berkembangnya individu pra diabetes menjadi individu penderita diabetes tanpa komplikasi.

β_2 = peluang berkembangnya individu penderita diabetes tanpa komplikasi menjadi individu penderita diabetes dengan komplikasi.

β_3 = peluang berkembangnya individu pra diabetes menjadi individu penderita diabetes dengan komplikasi.

α = peluang individu sembuh menjadi individu pra diabetes.

u_1 = kontrol pengobatan.

u_2 = kontrol terapi diet glukosa.

Asumsi-asumsi yang digunakan adalah

1. Penderita diabetes melitus dengan komplikasi dapat sembuh.
2. Penderita diabetes melitus yang sembuh dapat menjadi individu pra diabetes.
3. Kematian pada penderita pra-diabetes dan diabetes tanpa komplikasi hanya berupa kematian alami.
4. Kematian pada penderita diabetes dengan komplikasi berupa kematian alami dan kematian akibat komplikasi.
5. Laju kematian alami sama di setiap kelas.
6. Peluang perkembangan individu dari satu tahap ke tahap lain tidak bergantung umur, jenis kelamin, dan status sosial.
7. Populasi penduduk bersifat tertutup dalam pengertian bahwa terjadinya pertambahan atau pengurangan jumlah penduduk melalui emigrasi dan imigrasi diabaikan.

3. Analisis Kontrol Optimal

3.1 Fungsional Objektif (*Performance Index*)

Tujuan dari permasalahan optimasi kontrol optimal yang akan dibentuk adalah menimalkan banyaknya penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi untuk meningkatkan banyaknya individu sembuh. Fungsional objektifnya dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
J(u) = \int_0^{t_f} &\big(A_1D(t) + A_2C(t) + B_1{u_1}^2(t) \\
&+B_2{u_2}^2(t)\big)\, dt
\end{aligned} \tag{2}$$

dengan sistem persamaan (1) sebagai kendala, sedangkan A_1 dan A_2 adalah konstanta bobot yang bersesuaian dengan penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi. Konstanta B_1 dan B_2 adalah bobot sebagai faktor penyeimbang dari u_1 dan u_2, $t = 0$ adalah waktu awal, t_f adalah waktu akhir. Kemudian dicari ${u_1}^*, {u_2}^*$ sehingga berlaku

$$J({u_1}^*, {u_2}^*) = \min_{u_1, u_2 \in U} J(u_1, u_2) \quad (3)$$

dengan $U = \{u_1, u_2 : 0 \le u_1 \le 1, 0 \le u_2 \le 1, t \in [0, t_f]\}$.

3.2 Penyelesaian Kontrol Optimal

Langkah awal untuk menentukan kontrol optimal adalah membentuk fungsi Hamiltonian. Dalam persoalan ini kasus t_f tetap dan $x(t_f) = x_{t_f}$ bebas adalah syarat dari kondisi transversal dengan kontrol terbatas dapat dibentuk fungsi Hamiltoniannya sebagai berikut.

$$H(E, C, D, R, u_1, u_2, \lambda) = L(D, C, u_1, u_2) + \lambda_1 \frac{dE}{dt} + \lambda_2 \frac{dD}{dt} + \lambda_3 \frac{dC}{dt} + \lambda_4 \frac{dR}{dt} \quad (4)$$

dengan

$$L(D, C, u_1, u_2) = A_1 D(t) + A_2 C(t) + B_1 {u_1}^2(t) + B_2 {u_2}^2(t) \quad (5)$$

$\frac{dE}{dt}, \frac{dD}{dt}, \frac{dC}{dt}, \frac{dR}{dt}$ sama dengan ruas kanan dari sistem (1), $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ adalah variabel *costate* (variabel keadaan bantu).

Persamaan *costate* dan kondisi stasioner diperoleh dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin sebagai berikut.

a. Persamaan *Costate*

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E} = \lambda_1 \mu + (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_2)\beta_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)(1 - u_2)\beta_3 \quad (6)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial D} = -A_1 + \lambda_2 \mu + (\lambda_2 - \lambda_3)(1 - u_1)\beta_2 \quad (7)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial C} = -A_2 + \lambda_3(\mu + \upsilon + \delta) + (\lambda_3 - \lambda_4)\gamma \quad (8)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} = (\lambda_4 - \lambda_1)\, \alpha(1 - u_2) + \lambda_4 \mu \quad (9)$$

b. Kondisi Stationer

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2B_1}[\beta_2 D(\lambda_3 - \lambda_2)] \quad (10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2B_2}[\beta_1 E(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R(\lambda_1 - \lambda_4)] \quad (11)$$

Karena $0 \le u_1 \le 1$, sehingga berdasarkan teori kontrol optimal dengan variabel kontrol terbatas [3] diperoleh

$$ {u_1}^* = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2B_1}[\beta_2 D(\lambda_3 - \lambda_2)] \le 0 \\ \frac{1}{2B_1}[\beta_2 D(\lambda_3 - \lambda_2)], & 0 < u_1 < 1 \\ 1, & \frac{1}{2B_1}[\beta_2 D(\lambda_3 - \lambda_2)] \ge 1 \end{cases} \quad (12)$$

atau dapat ditulis sebagai

$${u_1}^* = \min(1, \max(0, \frac{1}{2B_1}[\beta_2 D^*(\lambda_3 - \lambda_2)]))$$

Demikian pula karena $0 \le u_2 \le 1$, sehingga diperoleh

$$ {u_2}^* = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2B_2}[\beta_1 E(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R(\lambda_1 - \lambda_4)] \le 0 \\ \frac{1}{2B_2}[\beta_1 E(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R(\lambda_1 - \lambda_4)], & 0 < u_2 < 1 \\ 1, & \frac{1}{2B_2}[\beta_1 E(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R(\lambda_1 - \lambda_4)] \ge 1 \end{cases} \quad (13)$$

atau dapat ditulis sebagai

$${u_2}^* = \min(1, \max(0, \frac{1}{2B_2}[\beta_1 E^*(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E^*(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R^*(\lambda_1 - \lambda_4)]))$$

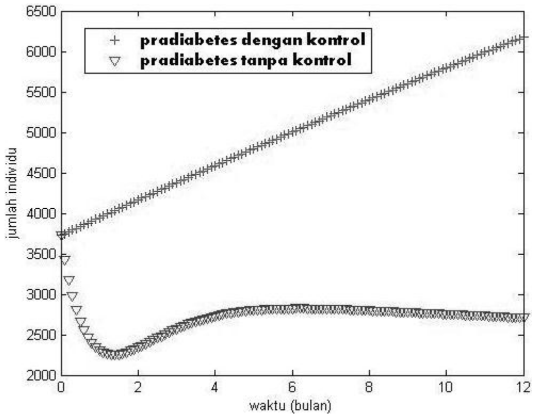
4. Simulasi Numerik

Persamaan (1) diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan didiskritisasi menggunakan pendekatan beda maju pada persamaan *state* (1) serta pendekatan beda mundur pada persamaan *costate* (6)-(9). Simulasi mengunakan data dari RS Kariadi periode bulan Januari-Desember tahun 2014 dengan nilai parameter-parameter seperti berikut:

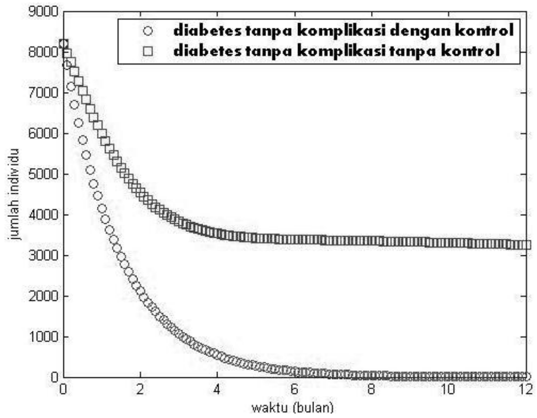
Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
I	274	β_1	0,69
μ	0,014	β_2	0,57
γ	0,347	β_3	0,74
υ	0	α	0,5
δ	0,013		

Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi numerik

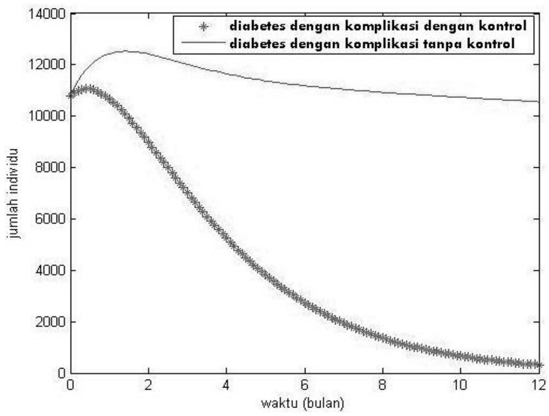
dan $E(0) = 3726$ orang, $D(0) = 8199$ orang, $C(0) = 10793$ orang, $R(0) = 3749$ serta $\lambda_1(12) = 0$, $\lambda_2(12) = 0$, $\lambda_3(12) = 0$, dan $\lambda_4(12) = 0$.
Nilai A_1, A_2, B_1 dan B_2 diberikan syarat yaitu $A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 1$ dan $0 \leq A_1$, A_2, B_1, $B_2 \leq 1$. Dipilih $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0{,}25$.



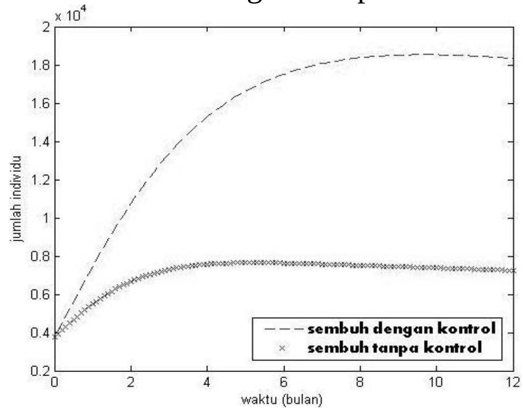
Gambar 2. Grafik simulasi pada kelas pra diabetes



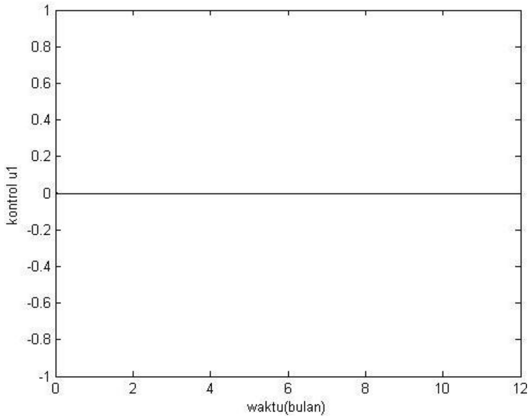
Gambar 3. Grafik simulasi pada kelas diabetes tanpa komplikasi



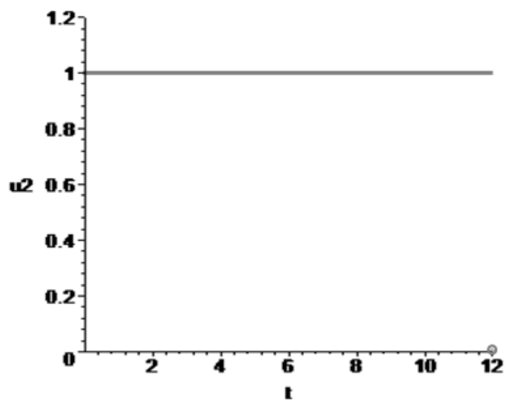
Gambar 4. Grafik simulasi pada kelas diabetes dengan komplikasi



Gambar 5. Grafik simulasi pada kelas sembuh (*recovered*)



Gambar 6. Grafik simulasi untuk kontrol u_1



Gambar 7. Grafik simulasi untuk kontrol u_2

Pada Gambar 6. terlihat bahwa banyaknya kontrol pengobatan (u_1) pada awal waktu $t = 0$ sampai akhir waktu $t = 12$ bulan bernilai 0 yang artinya pemberian pengobatan tidak bekerja secara efektif untuk mengendalikan banyaknya penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi. Pada Gambar 7. banyaknya kontrol terapi diet glukosa (u_2) pada awal waktu $t = 0$ sampai mendekati $t = 12$ bulan adalah maksimum sebesar 1, kemudian tepat pada akhir waktu $t = 12$ bulan pemberian kontrol mencapai nilai 0. Artinya pemberian kontrol terapi diet glukosa bekerja secara efektif untuk mereduksi banyaknya penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi serta mengakibatkan bertambahnya individu yang sembuh. Dampak pemberian kontrol untuk tiap kelas dapat dilihat lebih jelas pada Gambar 2-Gambar 5.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, hasil kontrol yang optimal pada model dinamik dengan kontrol pada populasi penderita diabetes melitus adalah

$$u_1{}^* = \min(1, \max(0, \frac{1}{2B_1}[\beta_2 D^*(\lambda_3 - \lambda_2)]))$$

$$u_2{}^* = \min(1, \max(0, \frac{1}{2B_2}[\beta_1 E^*(\lambda_2 - \lambda_1) + \beta_3 E^*(\lambda_3 - \lambda_1) + \alpha R^*(\lambda_1 - \lambda_4)]))$$

Simulasi numerik memperlihatkan bahwa pada saat bobot yang bersesuaian dengan penderita diabetes tanpa komplikasi, bobot yang bersesuaian dengan penderita diabetes dengan komplikasi, bobot penyeimbang dari kontrol pengobatan serta bobot penyeimbang dari kontrol terapi diet glukosa semuanya bernilai sama maka pengontrolan yang diterapkan dapat mereduksi banyaknya penderita diabetes tanpa komplikasi dan dengan komplikasi serta mengakibatkan banyaknya individu sembuh bertambah. Oleh karena itu, strategi penggunaan kontrol adalah dengan memberikan kontrol yang sesuai sehingga hasil yang didapat optimal yaitu mampu mereduksi banyaknya jumlah penderita diabetes tanpa dan dengan komplikasi.

6. Daftar Pustaka

[1] Endang Lanywati. 2001. *Diabetes Melitus Penyakit Kencing Manis*. Yogyakarta: Kanisius.

[2] Boutayeb, A., Boutayeb, W. and Lamlili, M. 2014. Optimal Control Approach to the Dynamics of a Population of Diabetics. *International Journal of Applied Mathematical Sciences* 8(56): 2773 – 2782.

[3] Kamien, M. I. And Schwartz, N. L. 1991. *Dynamic Optimization*. e.guigon.free.fr/rsc/book/KamienSchwartz91.pdf. Diakses pada 3 Februari 2015.