

# JURNAL MATEMATIKA

ISSN: 1410-8518

Vol. 17 No. 1, April 2014

---

**Jurusan Matematika FSM  
Universitas Diponegoro Semarang**

<b>Jurnal Matematika</b>	<b>Vol. 17</b>	<b>No. 1</b>	<b>Halaman 1 - 44</b>	<b>Semarang April 2014</b>	<b>ISSN 1410-8518</b>
------------------------------	----------------	--------------	---------------------------	--------------------------------	---------------------------

---

# JURNAL MATEMATIKA

ISSN: 1410-8518

Vol. 17 No. 1, April 2014

---

**Chief Editor:**

Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si

**Managing Editor:**

Drs. Bayu Surarso, M.Sc., Ph.D

**Business Manager:**

Drs. Kartono, M.Si

**Dewan Editor:**

Prof. Dr. Roberd Saragih, MT, Matematika Terapan ITB  
Prof. Dr. Budi Nurani, M.Si, Statistika UNPAD  
Prof. Drs. St. Budi Waluyo, M.Si, Ph.D, Matematika Terapan UNNES  
Dr. Ch. Rini I., Matematika Analisis UGM  
Farikhin, Ph.D, Matematika Analisis UNDIP  
Dr. Sunarsih, M.Si, Matematika Terapan UNDIP  
Drs. Kushartantya, M.I.Komp, Informatika UNDIP  
Drs. Y.D Sumanto, M.Si, Matematika Aljabar UNDIP  
Dra. Titi Udjiani, M.Si, Matematika Aljabar UNDIP

**Editor Teknik:**

Dr. R. Heru Tjahjana, M.Si.  
Suryoto, S.Si., M.Si.  
R. Heri Soelistyo Utomo, S.Si., M.Si.  
Siti Khabibah, S.Si., M.Sc.  
Nikken Prima Puspita, S.Si., M.Sc.  
Solikhin, S.Si., M.Sc

JURNAL MATEMATIKA terbit tiga kali setahun (April, Agustus, Desember), menerima artikel ilmiah dalam bidang matematika, statistika, dan ilmu komputer. Terbit sejak tahun 1998 dengan nama JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER dengan warna dasar sampul kuning dan warna tulisan hitam. Mulai tahun 2005 nama jurnal berubah menjadi JURNAL MATEMATIKA dengan warna dasar sampul kuning gading dan warna tulisan merah maron.

**Alamat Penerbit**

Jurusan Matematika Lt. 2 FSM Universitas Diponegoro Semarang  
Jl. Prof. Soedarto, SH Tembalang Semarang  
Telp (024) 70789493, Fax (024) 76480922  
E-mail: [jurnalmath@undip.ac.id](mailto:jurnalmath@undip.ac.id); [jurnalmath@gmail.com](mailto:jurnalmath@gmail.com)

## DAFTAR ISI

- 1 **Melita H, Kartono dan Sunarsih**, Kestabilan Model *Susceptible Vaccinated Infected Recovered* pada Penyebaran Penyakit Campak (*Measles*) Studi Kasus Kota Semarang 1
- 2 **Meryta F, Nikken Prima Puspita dan Farikhin**, Karakteristik Himpunan Bilangan Bulat Non Negatif pada Semiring Lokal dan Semiring Faktor 7
- 3 **R. Heri Soelistyo U., Widowati, R. Heru Tjahjana dan Lutfiyatun Niswah**, Analisis Kestabilan Model Dinamik Aliran Fluida Dua Fase pada Sumur Panas Bumi 14
- 4 **Erlin Dwi E., Siti Khabibah dan Farikhin**, Program Pecahan Linier 19
- 5 **R. Heru Tjahjana**, Strategi Dasar Pengendalian Multi Robot Apung dan Manfaatnya 24
- 6 **Putri Dentya R., Lucia Ratnasari dan Djuwandi**, Pelabelan *Graceful* Sisi-Ganjil pada Graf Web  $W(2,n)$  32
- 7 **Kartono, Djuwandi dan Farikhin**, Model Dinamika Strategi Penyebaran DBD dengan Menerapkan Tiga Strategi Pengendaliannya 39

**KESTABILAN MODEL *SUSCEPTIBLE VACCINATED INFECTED RECOVERED*  
(SVIR) PADA PENYEBARAN PENYAKIT  
CAMPAK (*MEASLES*)  
(Studi Kasus di Kota Semarang)**

Melita Haryati<sup>1</sup>, Kartono<sup>2</sup>, Sunarsih<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275

**Abstract.** Measles is the disease that caused by paramixovirus that infected to the humans by direct contact with infected person. Measles in Semarang was still as endemic disease. The aim of this study is analyze the SVIR (*Susceptible Vaccinated Inected Recovered*) model of the spread of Measles. This model is a system of nonlinear differential equation which solved by numerical solution with Euler's method. The study use the data from Semarang Health Department, from the SVIR model generated  $R_0 = 0.0013 < 1$ , disease free equilibrium (119; 103; 0; 10156). If the vaccination rate is increasing, so susceptible people will be decreased and increasing the recovered people. Based on the result of analysis SVIR model in the strategy to control the spread of Measles can be done by developing the program of Measles' vaccination.

**Keywords:** SVIR Model, Measles, Euler's Method

## 1. PENDAHULUAN

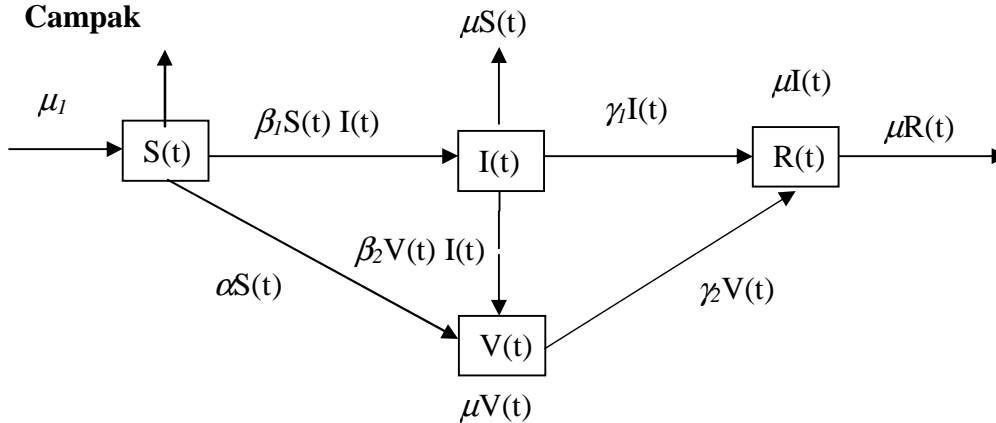
Penyakit Campak adalah penyakit yang terjadi akibat dari infeksi, keberadaan, dan pertumbuhan virus pada organisme *host* individu. Campak memiliki daya penularan tinggi, yang ditandai dengan demam, korisa, konjungtivitis, batuk disertai ruam *makulopapular* menyeluruh. Komplikasi Campak cukup serius seperti diare, pneumonia (radang paru-paru), otitis media, eksaserbasi, dan kematian [1]. Hingga tahun 2013 masih terjadi Kejadian Luar Biasa (KLB) penyakit Campak di kota Semarang. Bentuk model matematika yang digunakan dalam melihat tingkat penyebaran suatu penyakit menular disebut pemodelan epidemi. [2] Perlu adanya pengkonstrusian model penyebaran penyakit Campak sebagai dasar untuk menganalisis fenomena tersebut. Secara umum, model epidemik yaitu *susceptible* (S), *infected* (I), dan *recovered* (R) atau SIR, dimana *susceptible* (S) sebagai sub kelas populasi yang rentan terinfeksi, *infected* (I) sebagai sub kelas populasi yang terinfeksi, dan *recovered* (R) sebagai sub kelas yang telah sembuh. Penambahan

klas *vaccinated* ke dalam model dasar SIR yaitu sebagai salah satu strategi penanggulangan penyebaran penyakit Campak sehingga model SIR menjadi SVIR. Model matematika yang dibahas didasari oleh Xianning Liu, Yasuhiro Takeuchi, Shingo Iwami [3].

## 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Fenomena penyebaran penyakit Campak dapat digambarkan dalam suatu diagram transfer dinamik yang menjadi acuan dalam pengembangan model SVIR.

**a. Model Penyebaran Penyakit Campak**



**Gambar 2.1** Transfer Dinamik antar Klas pada Model SVIR

Parameter-parameter yang digunakan antara lain  $\mu$  yaitu konstanta laju kematian alami,  $\mu_1$  yaitu konstanta laju kelahiran,  $\alpha$  yaitu konstanta laju dimana individu *suspect* yang sudah divaksinasi Campak (masuk klas *vaccinated*),  $\beta_1$  yaitu tingkat transmisi penyakit Campak ketika individu *susceptible* kontak dengan individu yang terinfeksi (*infected*). Berdasarkan jurnal yang ditulis oleh Teri Johnson, 2009 menerangkan tingkat transmisi penyakit dapat diperoleh dari persamaan  $\dots = \dots$  [4].  $\beta_2$  yaitu tingkat transmisi penyakit Campak ketika individu *vaccinated* kontak dengan individu yang terinfeksi (*infected*).  $\gamma$  yaitu konstanta laju kesembuhan penyakit Campak dari klas *infected*.  $\gamma_2$  yaitu konstanta laju kesembuhan alami.

Asumsi-asumsi yang digunakan yaitu populasi konstan, tidak ada proses migrasi, pada usia vaksin (1-14 tahun) mendapat vaksinasi (imunisasi) Campak, pada setiap klas (kelompok) memungkinkan terjadinya kematian alami, penularan penyakit Campak melalui kontak langsung dengan penderita, setiap individu yang sembuh dari Campak mempunyai kekebalan permanen, umur, jenis kelamin, status sosial, dan ras tidak mempengaruhi kemungkinan terinfeksi.

Untuk menyatakan jumlah individu dalam klas  $S, V, I,$  dan  $R$  pada waktu  $t$

adalah  $S(t), V(t), I(t),$  dan  $R(t)$  dan  $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$ . Diasumsikan total populasi manusia  $N$  konstan, sehingga proporsi dari total populasi manusia adalah satu. Jadi dapat dituliskan  $s(t) + v(t) + i(t) + r(t) = 1$  dengan

$$\frac{ds}{dt} = \mu_1 - \beta_1 s i - \alpha s - \mu s, \quad \frac{di}{dt} = \beta_1 s i - \gamma i - \mu i, \quad \frac{dv}{dt} = \alpha s + \beta_2 v i - \mu v - \gamma_2 v, \quad \frac{dr}{dt} = \gamma i + \gamma_2 v - \mu r$$

dan nilai dari  $\mu, \mu_1, \alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma_2$  adalah positif.

[5] Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu yang menggambarkan penyebaran penyakit Campak yang terjadi pada populasi manusia dengan proses perpindahan antar klas *susceptible* ( $S$ ), *vaccinated* ( $V$ ), *infected* ( $I$ ), dan *recovered* ( $R$ ), yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \mu_1 - \beta_1 S I - \alpha S - \mu S \\ \dot{I} &= \beta_1 S I - \gamma I - \mu I \\ \dot{V} &= \alpha S + \beta_2 V I - \mu V - \gamma_2 V \\ \dot{R} &= \gamma I + \gamma_2 V - \mu R \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan kondisi awal:  $S(0) = 1, I(0) = 0, V(0) = 0, R(0) = 0$

Keterangan:

- : laju perubahan proporsi jumlah individu pada klas *susceptible* (rentan terkena penyakit Campak)
- : laju perubahan proporsi jumlah individu pada klas *vaccinated* (yang sudah diberikan vaksin Campak)

- : laju perubahan proporsi jumlah individu pada klas *infected* (yang terinfeksi penyakit Campak)
- : laju perubahan proporsi jumlah individu pada klas *recovered* (yang sembuh dari penyakit Campak).

**b. Solusi Kesetimbangan Model**

Titik kesetimbangan digunakan untuk mengetahui perilaku kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan tersebut. Titik kesetimbangan diperoleh jika memenuhi  $\dot{S} = 0, \dot{I} = 0, \dot{R} = 0$ , sehingga sistem Persamaan (2.1) pada titik  $(S, I, R)$  menjadi

$$\dot{S} = (\lambda - \mu - \beta I)S = 0$$

$$\dot{I} = (\beta SI - (\mu + \gamma)I) = 0$$

$$\dot{R} = (\mu S - (\mu + \gamma)R) = 0$$

diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu  $(S, I, R)$

$$= \left( \frac{\mu}{\beta}, 0, \frac{\mu}{\mu + \gamma} \right), \left( \frac{\mu}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}, \frac{\mu}{\mu + \gamma} \right)$$

titik kesetimbangan endemik, yaitu

$$= \left( \frac{\mu}{\beta + \mu}, \frac{\mu}{\beta + \mu}, \frac{\mu}{\beta + \mu} \right)$$

**c. Basic Reproduction Number**

Untuk mengetahui tingkat penyebaran penyakit Campak diperlukan suatu parameter yaitu *basic reproduction number* (rasio reproduksi dasar) yang dinotasikan dengan  $R_0$ . Rasio reproduksi dasar dapat diekspresikan sebagai

$$R_0 = \frac{\beta SI}{(\mu + \gamma)}$$

Jika  $R_0 < 1$  maka  $\dot{I} < 0$  untuk  $I > 0$ , yang berarti bahwa jumlah penderita penyakit Campak berangsur-angsur semakin berkurang sehingga penyakit akan menghilang dari populasi dan tidak terjadi endemik. Jika  $R_0 > 1$  maka  $\dot{I} > 0$ , yang berarti jumlah penderita berangsur-angsur semakin bertambah sehingga penyakit Campak akan meluas dan endemik.

**d. Kestabilan dari Solusi Kesetimbangan**

Kestabilan di sekitar titik kesetimbangan dicari dengan melinierisasikan sistem di sekitar titik kesetimbangan, kemudian menentukan nilai eigen yang menjadi penentu stabil atau tidaknya sistem. Nilai eigen dari linierisasi sistem SVIR pada titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$\lambda_1 = -(\mu + \gamma), \lambda_2 = -(\mu + \gamma), \lambda_3 = (\beta S - (\mu + \gamma))$$

$\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 > 0$  sehingga nilai eigen  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 > 0$  sehingga nilai eigen  $\lambda_3 < 0$ , bernilai negatif  $(\lambda_3 - 1) < 0$   $\lambda_3 < 1$ . Syarat stabil asimtotik lokal jika  $\lambda_3 < 1$  dan tidak stabil jika  $\lambda_3 > 1$ .  $\lambda_3 > 0$  sehingga nilai eigen  $\lambda_3 < 0$ . Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil jika memenuhi  $\lambda_3 < 1$ .

**e. Simulasi Numerik dengan Metode Euler**

Berdasarkan data-data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Semarang tahun 2013, maka nilai dari setiap parameter sebagai berikut  $\mu = 0.0081$  (laju kematian alami=laju kelahiran),  $\alpha = 0.696, \beta = 0.0824, \beta = 0.0401, \gamma = 1, \gamma = 0.8$  sehingga diperoleh nilai  $R_0 = 0.00133445 < 1$  (*Basic reproduction number*), titik kesetimbangan bebas penyakit untuk klas: *susceptible* yaitu pada  $S = 0.011504047720494$  atau  $119$ , *vaccinated* yaitu pada  $V = 0.009908200981888$  atau  $103$ , *infected*  $I = 0$ , dan *recovered*  $R = 0.978587751297617$  atau  $10156$ .

Dengan demikian  $R_0 < 1$  yang sudah diperoleh dapat menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik, yaitu pada  $(S, I, R) = (0.011504047720494; 0.009908200981888; 0; 0.978587751297617)$   $(119; 103; 0; 10156)$

Dengan parameter yang telah diperoleh sehingga sistem dapat dicari solusi numeriknya dengan metode Euler [6].

Substitusi parameter-parameter yang ada  $\mu = 0.0081$ ,  $\alpha = 0.696$ ,  $\beta = 0.0824$ ,  $\beta = 0.0401$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 0.8$  sehingga persamaan diferensial menjadi

$$\begin{aligned} - &= 0.0081 - 0.7041 - 0.0824 \\ - &= 0.696 - 0.8081 - 0.0401 \\ - &= 0.0824 + 0.0401 - 1.0081 \\ - &= 0.8 + - 0.0081 \end{aligned}$$

batas interval : 0 1 syarat awal:  
 $(0) = 1$ ,  $(0) = 0$ ,  $(0) = 0$ ,  $(0) = 0$ ,  
 dimana  $= 100$ . Disini terlihat bahwa  
 batas awal interval,  $= 0$  dan batas akhir  
 $= 1$ .

Dalam metode Euler, pertama kali yang harus dilakukan adalah menghitung *step-size(h)* [2], dengan cara

$$= \frac{1 - 0}{100} = 0,01$$

kemudian menentukan posisi titik-titik berdasarkan rumus

$$\begin{aligned} = + &= 0 + (0,01) \\ &= 0,01 \end{aligned}$$

Selanjutnya, menetapkan , , , yang diambil dari syarat awal  $(0) = 1$ ,  $(0) = 0$ ,  $(0) = 0$ ,  $(0) = 0$  sehingga dapat ditulis dengan

$$= 1, = 0, = 0, = 0$$

Dengan demikian persamaan Euler dapat dinyatakan sebagai berikut

**a) Klas Susceptible**

$$\begin{aligned} = + & 0.0081 - 0.7041 \\ & - 0.0824 ) \\ = & 0.000081 + 0.992959 \\ & - 0.000824 \end{aligned}$$

**b) Klas Vaccinated**

$$\begin{aligned} = + & 0.696 - 0.8081 \\ & - 0.0401 ) \\ = & 0.00696 + 0.991919 \\ & - 0.000401 \end{aligned}$$

**c) Klas Infected**

$$\begin{aligned} = + & 0.0824 + 0.0401 \\ & - 1.0081 ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & 0.000824 + 0.000401 \\ & + 0.989919 \end{aligned}$$

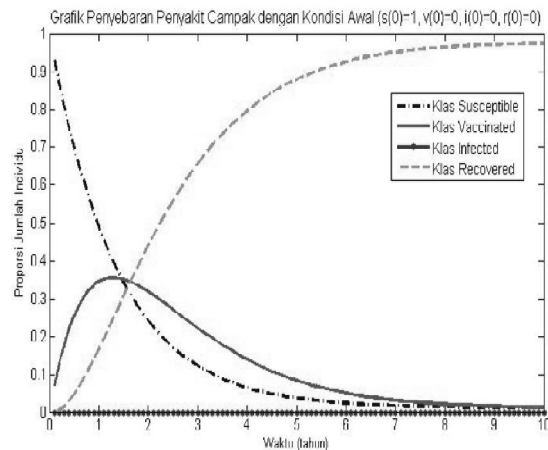
**d) Klas Recovered**

$$\begin{aligned} = + & 0.8 + - 0.0081 \\ = & 0.008 + 0.01 + 0.999919 \end{aligned}$$

dimana  $= 0,1,2, \dots, - 1$ . karena  
 $= 100$ , maka  $= 0,1,2, \dots, 99$

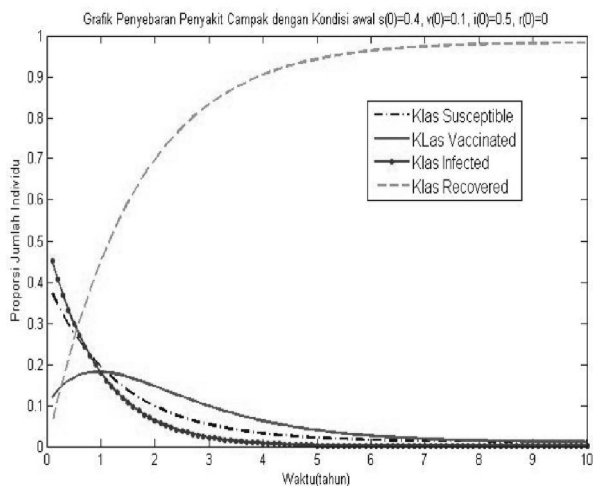
Perhitungan (iterasi) dilakukan berulang-ulang sebanyak N kali.

Dari perhitungan tersebut dapat disajikan hasilnya dalam bentuk grafik berikut



**Gambar 2.2** Grafik Model SVIR pada Kondisi Awal Bebas Penyakit Campak

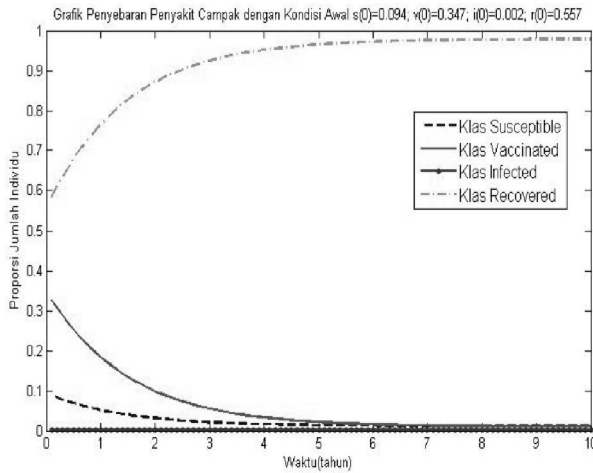
Gambar 2.2 menunjukkan perilaku penyebaran penyakit Campak setiap klas kondisi awal bebas penyakit, terlihat bahwa tidak ada orang yang terinfeksi.



**Gambar 2.3** Grafik Model SVIR pada Kondisi Awal Endemik  $(0) = 0.4$ ,  $(0) = 0.1$ ,  $(0) = 0.5$ ,  $(0) = 0$

Penyebaran Penyakit Campak Gambar 2.3 menunjukkan perilaku penyebaran penyakit Campak pada kondisi awal

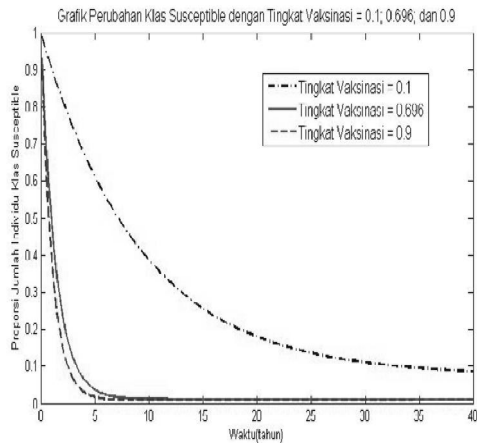
endemik dengan jumlah penderita yang cukup tinggi.



**Gambar 2.4** Grafik Model SVIR pada Penyebaran Penyakit Campak, Kondisi Awal Endemik  $(s(0) = 0.094, v(0) = 0.347, i(0) = 0.002, r(0) = 0.557$

Gambar 2.4 menunjukkan perilaku penyebaran penyakit Campak pada kondisi awal endemik dengan jumlah penderita yang sedikit.

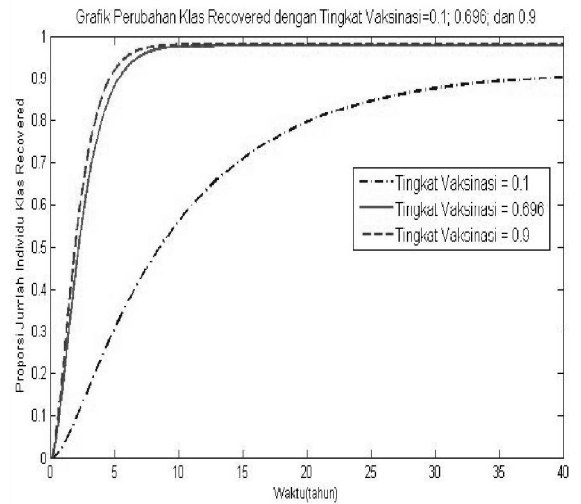
a. Perubahan klas *Susceptible* dengan perbedaan tingkat vaksinasi ( $\alpha = 0.1; 0.696; \text{ dan } 0.9$ ), pada syarat awal bebas penyakit menggunakan metode Euler,



**Gambar 2.5** Grafik Perubahan Klas *Susceptible*, dengan Tingkat vaksinasi ( $\alpha = 0.1; 0.696; \text{ dan } 0.9$ ), Syarat Awal:  $(s(0) = 1, v(0) = 0, i(0) = 0, r(0) = 0$

Gambar 2.5 menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat vaksinasi, maka semakin rendah jumlah individu *suspectnya*.

b. Perubahan klas *Recovered* dengan perbedaan tingkat vaksinasi ( $\alpha = 0.1; 0.696; \text{ dan } 0.9$ ), pada syarat awal bebas penyakit menggunakan metode Euler



**Gambar 2.6** Grafik Perubahan Klas *Recovered*, dengan Tingkat Vaksinasi ( $\alpha = 0.1; 0.696; \text{ dan } 0.9$ ), Syarat Awal:  $(s(0) = 1, v(0) = 0, i(0) = 0, r(0) = 0$

Gambar 2.6 menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat vaksinasi, maka semakin tinggi jumlah individu yang sembuh.

### 3. PENUTUP

Model SVIR memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit Campak pada  $(s, v, i, r) =$

$(\frac{1}{1+\alpha}, \alpha, 0, \frac{1}{1+\alpha})$  dan persamaan *basic reproduction number* yaitu  $R_0 = \frac{1}{(1+\alpha)(1-\alpha)}$ .

Titik kesetimbangan yaitu pada  $(s, v, i, r) = (119; 103; 0; 10156)$  dan  $R_0 = 0.00133 < 1$  maka model stabil. Solusi ini dapat dijadikan acuan menganalisis penyebaran penyakit campak. Berdasarkan hasil yang didapat, jika tingkat imunisasi (vaksinasi) semakin tinggi, maka jumlah individu *suspect* menurun dan meningkatkan jumlah individu yang sembuh (*recovered*).



#### 4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Perry, Robert T dan Neal A Halsey, (2004), *The Clinical Significance of Measles: A Review*. Oxfordjournals.
- [2] Soedjiono, B., (1995), *Pengantar Model Matematika*. Yogyakarta : FMIPA UGM
- [3] Liu, Xianning; Yasuhiro Takeuchi; Shingo Iwami, (2007), *SVIR Epidemic Models with Vaccination Strategies*. Science Direct.
- [4] Johnson, Teri, (2009), *Mathematical Modeling of Diseases : SIR Model*, University of Minnesota, Morris.
- [5] Campbell, S. L. and Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems*. New Jersey: Princeton University Press.
- [6] Triatmodjo, B., (2002), *Metode Numerik*. Yogyakarta: FT UGM.
-