

# JURNAL MATEMATIKA

ISSN: 1410-8518

Vol. 13 No. 3, Desember 2010

---

---

**Jurusan Matematika FMIPA  
Universitas Diponegoro Semarang**

<b>Jurnal Matematika</b>	<b>Vol. 13</b>	<b>No. 3</b>	<b>Halaman 111-167</b>	<b>Semarang Desember 2010</b>	<b>ISSN 1410-8518</b>
------------------------------	----------------	--------------	----------------------------	-----------------------------------	---------------------------

---

---

# JURNAL MATEMATIKA

ISSN: 1410-8518

Vol. 13 No. 3, Desember 2010

---

**Chief Editor:**

Dr. Widowati, S.Si., M.Si

**Managing Editor:**

Drs. Bayu Surarso, M.Sc., Ph.D

**Business Editor:**

Drs. Kartono, M.Si

**Dewan Editor:**

Prof. Dr. Roberd Saragih, MT, Matematika ITB  
Prof. Dr. Budi Nurani, M.Si, Matematika UNPAD  
Drs. St. Budi Waluyo, M.Si, Ph.D, Matematika UNNES  
Dr. Ch. Rini Indrati, M.Si, Matematika UGM  
Drs. Y.D Sumanto, M.Si, Matematika UNDIP  
Dra Tatik Widiharih, M.Si, Matematika UNDIP

**Editor Teknik:**

Drs. Sutimin, M.Si.  
R. Heri Soelistyo Utomo, S.Si., M.Si  
Suryoto, S.Si., M.Si  
Abdul Choliq, A.Md

JURNAL MATEMATIKA terbit tiga kali setahun (April, Agustus, Desember), menerima artikel ilmiah dalam bidang matematika, statistika, dan ilmu komputer. Terbit sejak tahun 1998 dengan nama JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER dengan warna dasar sampul kuning dan warna tulisan hitam. Mulai tahun 2005 nama jurnal berubah menjadi JURNAL MATEMATIKA dengan warna dasar sampul kuning gading dan warna tulisan merah maron.

**Alamat Penerbit**

Jurusan Matematika Lt. 2 FMIPA Universitas Diponegoro Semarang  
Jl. Prof. Soedarto, SH Tembalang Semarang 1269  
Telp (024) 70789493, Fax (024) 76480922  
E-mail: [jurnalmath@undip.ac.id](mailto:jurnalmath@undip.ac.id); [jurnalmath.undip@gmail.com](mailto:jurnalmath.undip@gmail.com)

## DAFTAR ISI

1. **R. Heru Tjahjana**, Model Sistem Multi Agen Linier dengan Formasi Segitiga 111
2. **Deffyana Prastya Arifani dan Suryoto**, Semi-Homomorfisma  $BCK$ -Aljabar 116
3. **Juliana br Ginting dan Widowati**, Kestabilan Sistem Kontrol Jaringan terhadap Waktu Tunda 129
4. **Novi Irawati dan Robertus Heri**, Pelabelan Total Titik Ajaib pada *Complete Graph*  $K_n$  dengan  $n$  Ganjil 136
5. **Helmie Arief Wibawa**, Efek Fungsi RCC dalam Autentifikasi Citra Berwarna Berbasis Transformasi Integer 143
6. **Wiji Budi Pratikno dan Sunarsih**, Model Dinamis Rantai Makanan Tiga Spesies 151
7. **Tina Anggitta Novia dan Lucia Ratnasari**, Operasi Gabungan, Join, Komposisi dan Hasil Kali Kartesian pada Graf Fuzzy serta Komplemennya 159

# MODEL DINAMIS RANTAI MAKANAN TIGA SPESIES

Wiji Budi Pratikno dan Sunarsih  
Program Studi Matematika FMIPA UNDIP  
Jl. Prof. Soedarto, SH, Semarang, 50275

**Abstract.** Three species food chain models are model that express the interaction of three populations of *prey*, *first predator* and *second predator* populations. The models are derived from a combination of logistic growth model between *prey* population and *predator population*. Model that is used is a *Holling* type II functional response. The model consists of non linear differential equations with three dependent variables, there are  $x_1(t)$  representing size of *prey* population at time  $t$ ,  $x_2(t)$  is size of *first predator* population at time  $t$ , and  $x_3(t)$  is size of *second predator* population at time  $t$ . From the result of stability analysis conducted on the food chain model of three species are found six equilibrium points based on the value eigen, and six cases of different stability.

**Keywords :** Food chain, *prey*, *predator*, eigen values, equilibrium point.

## 1. PENDAHULUAN

Ekologi merupakan cabang ilmu dalam biologi yang mempelajari tentang hubungan makhluk hidup dengan habitatnya. Dalam ekologi, dikenal istilah rantai makanan. Rantai makanan merupakan lintasan konsumsi makanan yang terdiri dari beberapa spesies organisme [6]. Bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan berupa interaksi dua spesies yaitu interaksi antara spesies mangsa (*prey*) dengan pemangsa (*predator*). Model yang mendiskripsi kan interaksi dua spesies yang terdiri dari *prey* dan *predator* adalah model rantai makanan dua spesies. Kehadiran *predator* memberikan pengaruh pada jumlah *prey*. Pada interaksi tiga spesies, kehadiran *predator kedua* berpengaruh pada jumlah *predator pertama* dan *prey* sehingga dalam rantai makanan setiap komponennya saling memberikan pengaruh. Model yang mendiskripsikan interaksi tiga spesies yang terdiri dari *prey*, *predator pertama*, dan *predator kedua* adalah model rantai makanan tiga spesies. Untuk itu dari model rantai makanan tiga spesies ini akan dicari solusi kesetimbangan dan dianalisis perilaku dari sistem yang dapat ditentukan

dengan menganalisis kestabilan dari solusi kesetimbangan.

## 2. TITIK KESTIMBANGAN

Diberikan sistem persamaan differensial non *linear* autonomous

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Titik  $(x^*, y^*)$  dimana  $f(x^*, y^*) = 0$  dan  $g(x^*, y^*) = 0$  disebut titik kritis atau kesetimbangan dari sistem (1).[3]

## 3. KRITERIA KESTABILAN

Kriteria kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian. Untuk mengetahui perilaku kesetimbangan untuk matriks Jacobian berukuran  $2 \times 2$  dapat digunakan metode determinan-trace.

Misalkan matriks Jacobian  $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

untuk persamaan karakteristik matriks  $J$  adalah

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (2)$$

**Definisi 3.1 [1]**

Trace matriks  $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  adalah

$$trJ = a + d$$

Determinan dari matriks  $J$  adalah  $\det J = ad - bc$

Persamaan karakteristik (2) dapat ditulis menjadi

$$\lambda^2 - trJ \lambda + \det J = 0 \quad (3)$$

dari persamaan (3) didapat nilai eigen dari matriks yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{trJ \pm \sqrt{D}}{2} \quad (4)$$

dengan  $D = (trJ)^2 - 4 \det J$ .

**4. MODEL PERTUMBUHAN EKSPONENSIAL**

Laju perubahan populasi  $\frac{dN}{dt}$

merupakan laju pertumbuhan  $R$  dikalikan dengan besar populasi  $N$ . Misalkan laju pertumbuhan konstan ( $R_0$ ), maka pertumbuhan populasi adalah solusi dari persamaan differensial linear orde satu dengan koefisien konstan

$$\frac{dN}{dt} = R_0 N$$

Dimana  $R_0$  konstan.

**5. MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK**

Model logistik didapat dengan cara memasukkan faktor daya dukung lingkungan ( $K$ ) secara eksplisit. Jika dalam populasi ada  $N$  individu, maka lingkungan masih dapat mendukung  $K - N$  individu. Jadi masih ada bagian lingkungan yang masih bisa diisi, sebesar  $\frac{(K - N)}{K}$ . Bagian inilah yang sebanding dengan pertumbuhan perkapita. Oleh

karena itu  $\frac{dN}{Ndt} = r \frac{(K - N)}{K}$  atau

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{(K - N)}{K}$$

**6. PEMBAHASAN**

Rantai makanan dapat dimodelkan ke dalam suatu sistem persamaan differensial. Sistem ini memberikan laju perubahan biomassa dari pertumbuhan dan mortalitas pada setiap tingkatan trofik. Model perubahan biomassa tiap tingkatan trofik untuk spesies  $i$  dituliskan dalam persamaan:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i - m_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

dengan,

$x_i$  = jumlah populasi spesies  $i$

$g_i$  = laju pertumbuhan populasi spesies  $i$

$m_i$  = laju kematian populasi spesies  $i$

Holling (1959) mengelompokkan tiga tipe respon fungsional predator yaitu tipe linear (Holling tipe I), tipe hiperbolik (Holling tipe II), dan tipe sigmoidal (Holling tipe III). Untuk laju pertumbuhan spesies dari ketiga tipe dapat dituliskan ke dalam persamaan yaitu:

Non Linear :  $g_i = e_i a_i x_i x_{i-1}$

Hiperbolik:  $g_i = e_i \frac{a_i x_i x_{i-1}}{b_i + x_{i-1}} \quad (6)$

Sigmoidal:  $g_i = e_i \frac{a_i x_i x_{i-1}^2}{b_i^2 + x_{i-1}^2}$

dengan,

$g_i$  = laju pertumbuhan populasi spesies  $i$

$e_i$  = efisiensi pemberian makanan dari pemangsa untuk pembentukan predator yang baru.

$a_i$  = rasio pemangsa

$b_i$  = konstanta setengah jenuh

Sedangkan untuk laju kematian spesies meliputi dua hal yaitu kematian alami dan kematian yang disebabkan oleh proses pemangsa. Laju kematian dari ketiga tipe dapat dituliskan ke dalam persamaan:

Linear:  $m_i = a_i x_i x_{i-1} + d_i x_i$

Hiperbolik:  $m_i = \frac{a_{i+1} x_{i+1} x_i}{b_{i+1} + x_i} + d_i x_i$  (7)

Sigmoidal:  $m_i = \frac{a_{i+1} x_{i+1}^2 x_i}{b_{i+1}^2 + x_i^2} + d_i x_i$

dengan,

$m_i$  : laju kematian populasi spesies  $i$

$d_i$  : laju kematian konstan populasi spesies  $i$

Model rantai makanan dipengaruhi oleh banyak faktor mulai dari banyaknya spesies yang terlibat maupun penentuan modelnya sehingga diperlukan asumsi-asumsi untuk membatasi pemodelan tentang rantai makanan. Asumsi yang digunakan dalam pembahasan antara lain:

1. Model rantai makanan yang digunakan adalah model rantai makanan tiga spesies yang terdiri dari spesies *prey*, *predator pertama*, dan *predator kedua* yang mana *prey* merupakan satu-satunya mangsa bagi *predator pertama* dan *predator pertama* merupakan satu-satunya mangsa bagi *predator kedua*.
2. Tidak terjadi siklus perulangan rantai makanan, dalam artian *prey* dimangsa *predator pertama*, *predator pertama* dimangsa *predator kedua*, dan tidak berlaku *predator kedua* dimangsa oleh *prey*.
3. Semua parameter dan variabel yang digunakan tidak negatif.
4. Tidak ada sumber makanan alternatif lainnya sehingga digunakan tipe *hiperbolik*.

Dengan demikian, model rantai makanan tiga spesies dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \left( r \left( 1 - \frac{x_1}{K} \right) - \frac{a_2 x_2}{b_2 + x_1} \right) \quad (8.a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{e_2 a_2 x_1 x_2}{b_2 + x_1} - \frac{a_3 x_2 x_3}{b_3 + x_2} - d_2 x_2 \quad (8.b)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{e_3 a_3 x_2 x_3}{b_3 + x_2} - d_3 x_3 \quad (8.c)$$

dengan,

$x_1$  = jumlah populasi *prey*

$r$  = laju pertumbuhan populasi *prey*

$K$  = kapasitas daya tampung populasi *prey*

$a_2$  = rasio pemangsaan *predator pertama*

$b_2$  = konstanta setengah jenuh untuk *predator pertama*

$x_2$  = jumlah populasi *predator pertama*

$e_2$  = efisiensi pemberian makanan dari pemangsaan untuk pembentukan *predator pertama* yang baru

$d_2$  = laju kematian konstan *predator pertama*

$e_3$  = efisiensi pemberian makanan dari pemangsaan untuk pembentukan *predator kedua* yang baru

$d_3$  = laju kematian konstan *predator kedua*

$a_3$  = rasio pemangsaan *predator kedua*

$b_3$  = konstanta setengah jenuh untuk *predator kedua*

$x_3$  = jumlah populasi *predator kedua*

### 6.1 Titik Kesetimbangan

Solusi dari persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c) berada pada daerah  $G$  dimana  $G = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_1 \leq K, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3\}$  Misalkan  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  adalah solusi dari persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c). Solusi kesetimbangan akan terpenuhi jika

$\frac{dx_1}{dt} = 0$ ,  $\frac{dx_2}{dt} = 0$ , dan  $\frac{dx_3}{dt} = 0$ . Dari persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c) didapat enam titik kesetimbangan yaitu:

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_1 = (K, 0, 0),$$

$$E_2 = (0, x_2, x_3), \quad E_3 = (x_{1E}, x_{2E}, 0),$$

$$E_4 = (\hat{x}_{1A}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3A}) \text{ dan } E_5 = (\hat{x}_{1B}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3B})$$

$$\text{dimana } x_2 = \frac{b_2 d_3}{e_3 a_3 - d_3}, \quad x_3 = \frac{d_2 (b_3 + x_2)}{-a_3}$$

$$x_{1E} = \frac{b_2 d_2}{(e_2 a_2 - d_2)},$$

$$x_{2E} = \frac{r(K - x_{1E})(b_2 + x_{1E})}{K a_2}$$

$$\hat{x}_{1A} = \frac{1}{2}(K - b_2) + \frac{1}{2r} \sqrt{[r(K - b_2)]^2 + 4r(rb_2 K - K a_2 \hat{x}_2)}$$

$$\hat{x}_{1B} = \frac{1}{2}(K - b_2) - \frac{1}{2r} \sqrt{[r(K - b_2)]^2 + 4r(rb_2 K - K a_2 \hat{x}_2)}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{b_3 d_3}{e_3 a_3 - d_3},$$

$$\hat{x}_{3A} = \frac{\left( e_2 a_2 \hat{x}_{1A} - d_2 (b_2 + \hat{x}_{1A}) \right) (b_3 + \hat{x}_2)}{a_3 (b_2 + \hat{x}_{1A})},$$

dan

$$\hat{x}_{3B} = \frac{\left( e_2 a_2 \hat{x}_{1B} - d_2 (b_2 + \hat{x}_{1B}) \right) (b_3 + \hat{x}_2)}{a_3 (b_2 + \hat{x}_{1B})}.$$

### 6.2 Analisis Kestabilan

Persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c) adalah sistem persamaan differensial non linear, untuk menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangannya, terlebih dahulu dilakukan pelinieran terhadap persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c). Dari linierisasi, diperoleh matriks Jacobian pada titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  yaitu:

$$J(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\frac{a_1 x_1^*}{b_2 + x_1^*} & 0 \\ \frac{e_2 a_2 x_1^* b_2}{(b_2 + x_1^*)^2} & a_{22} & -\frac{a_2 x_2^*}{b_3 + x_2^*} \\ 0 & \frac{e_2 a_2 x_1^* b_2}{(b_2 + x_1^*)^2} & \frac{e_2 a_2 x_2^*}{b_3 + x_2^*} - d_3 \end{bmatrix}$$

... (9)  
dengan:

$$a_{11} = r - \frac{2rx_1^*}{K} - \frac{a_2 x_2^* b_2}{(b_2 + x_1^*)^2}$$

$$a_{22} = \frac{e_2 a_2 x_1^*}{b_2 + x_1^*} - \frac{a_3 x_3^* b_3}{(b_3 + x_2^*)^2} - d_2$$

Selanjutnya akan dianalisis perilaku kestabilan dari persamaan (8.a), (8.b), dan (8.c) dengan cara mensubstitusi nilai dari masing-masing titik kesetimbangan ke dalam matriks (9) sebagai berikut.

**Titik 1:**  $E_0 = (0, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan titik  $E_0 = (0, 0, 0)$  ke dalam matriks (9) diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = -d_2, \text{ dan } \lambda_3 = -d_3$$

**Titik 2:**  $E_1 = (K, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan titik  $E_1 = (K, 0, 0)$  ke dalam matriks (9) diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = -r, \lambda_2 = \frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2, \text{ dan } \lambda_3 = -d_3$$

**Titik 3:**  $E_2 = (0, x_2^*, x_3^*)$

Dengan mensubstitusikan titik  $E_2 = (0, x_2^*, x_3^*)$  ke dalam matriks (9) diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = r - \frac{a_1 b_3 d_3}{b_2 (e_3 a_3 - d_3)},$$

dan

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\frac{d_2 d_3}{e_3 a_3} \pm \sqrt{\left(\frac{d_2 d_3}{e_3 a_3}\right)^2 - 4\left(-\frac{d_2 d_3}{e_3 a_3}(e_3 a_3 - d_3)\right)}}{2}$$

**Titik 4:**  $E_3 = (x_{1E}, x_{2E}, 0)$

Dengan mensubstitusikan titik  $E_3 = (x_{1E}, x_{2E}, 0)$  ke dalam matriks (9) diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = \frac{a_3 b_2 e_3 r (K (e_2 a_2 - d_2) - b_2 d_2)}{b_3 K (e_2 a_2 - d_2)^2 + b_2 e_2 r (K (e_2 a_2 - d_2) - b_2 d_2)} - d_3$$

, dan

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \frac{rd_2 (K (e_2 a_2 - d_2) - b_2 (e_2 a_2 + d_2))}{K e_2 a_2 (e_2 a_2 - d_2)}$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{rd_2 (K (e_2 a_2 - d_2) - b_2 (e_2 a_2 + d_2))}{K e_2 a_2 (e_2 a_2 - d_2)}\right)^2 - 4\left(\frac{rd_2}{e_2 a_2 K} (K (e_2 a_2 - d_2) - b_2 d_2)\right)}$$

**Titik 5:**  $E_4 = (\hat{x}_{1A}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3A})$  dan **Titik 6:**

$$E_5 = (\hat{x}_{1B}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3B})$$

Untuk titik 5:  $E_4 = (\hat{x}_{1A}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3A})$  dan titik 6:

$E_5 = (\hat{x}_{1B}, \hat{x}_2, \hat{x}_{3B})$  dianalisis dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurtwitz*.

### 6.3 Simulasi Model

Untuk lebih memperjelas mengenai pembahasan model dilakukan simulasi model untuk contoh penerapan di atas. Berdasarkan perhitungan nilai eigen pada pembahasan sebelumnya didapat beberapa faktor yang mempengaruhi kestabilan masing-masing titik kesetimbangan yaitu  $\frac{e_1 a_1 K}{b_2 + K} - d_2$ ,  $e_2 a_2 - d_2$  dan  $e_3 a_3 - d_3$ .

Didapat enam kemungkinan nilai yaitu  $\frac{e_1 a_1 K}{b_2 + K} - d_2 > 0$ ,  $\frac{e_1 a_1 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$ ,  $e_2 a_2 - d_2 > 0$ ,  $e_2 a_2 - d_2 < 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 > 0$  dan  $e_3 a_3 - d_3 < 0$ . Dengan melakukan kombinasi didapat enam kasus yang berbeda yaitu:

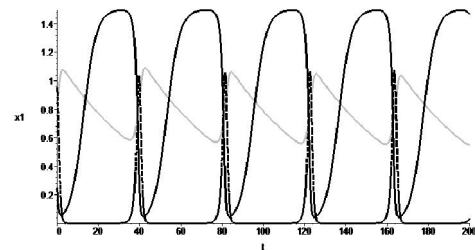
#### Kasus 1 :

Untuk kasus 1 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu  $\frac{e_1 a_1 K}{b_2 + K} - d_2 > 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 > 0$

dan  $e_2 a_2 - d_2 > 0$  menggunakan nilai parameternya  $r = 0.32$ ,  $K = 1.5$ ,  $a_2 = 1.6$ ,  $b_2 = 0.65$ ,  $d_2 = 0.84$ ,  $e_2 = 2.1$ ,  $a_3 = 0.5$ ,  $b_3 = 0.39$ ,  $d_3 = 0.02$  dan  $e_3 = 0.5$  [5], dengan nilai awal  $x_1(0) = 0.45$ ,  $x_2(0) = 0.35$  dan  $x_3(0) = 0.25$

Dari nilai parameter yang diberikan, didapat titik kesetimbangan  $E_0 = (0, 0, 0)$  tidak stabil, titik  $E_1 = (1.5, 0, 0)$  tidak stabil,  $E_2 = (0, 0.034, -0.712)$  tidak stabil,  $E_3 = (0.2167, 0.1483, 0)$  tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada Kasus 1.



**Gambar 1.** Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 1

Keterangan :

- : Populasi prey
- (dashed) : Populasi predator pertama
- (dotted) : Populasi predator kedua

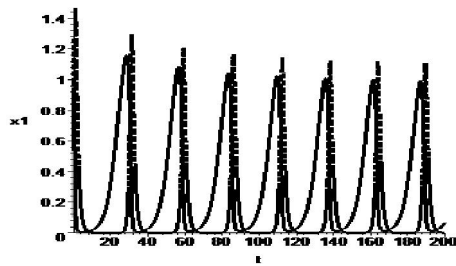
#### Kasus 2 :

Untuk kasus 2 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu  $\frac{e_1 a_1 K}{b_2 + K} - d_2 > 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 < 0$  dan  $e_2 a_2 - d_2 > 0$  menggunakan nilai parameternya  $r = 0.32$ ,  $K = 1.5$ ,  $a_2 = 1.6$ ,  $b_2 = 0.65$ ,  $d_2 = 0.84$ ,  $e_2 = 2.1$ ,  $a_3 = 2.1$ ,  $b_3 = 2.3$ ,  $d_3 = 3.9$  dan  $e_3 = 0.2$  [5], dengan nilai awal  $x_1(0) = 0.45$ ,  $x_2(0) = 0.35$  dan  $x_3(0) = 0.25$

Dari nilai parameter yang diberikan, didapat titik kesetimbangan  $E_0 = (0, 0, 0)$  tidak stabil, titik  $E_1 = (1.5, 0, 0)$  tidak stabil, titik  $E_2 = (0, -2.578, 0.111)$  tidak stabil, titik  $E_3 = (0.2167, 0.1483, 0)$  tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 2.





**Gambar 2.** Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 2

Keterangan :

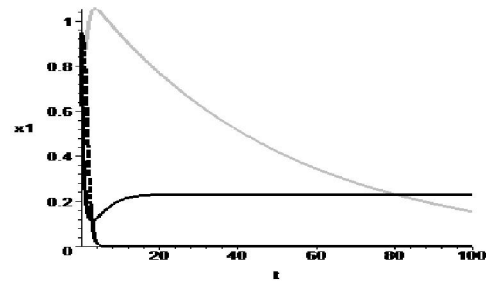
- : Populasi *prey*
- : Populasi *predator pertama*
- : Populasi *predator kedua*

**Kasus 3 :**

Untuk kasus 3 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu  $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 > 0$  dan  $e_2 a_2 - d_2 > 0$  menggunakan nilai parameternya  $r = 0.32$ ,  $a_2 = 1.6$ ,  $d_2 = 0.84$ , dan  $e_2 = 2.1$  [5], sedangkan untuk  $K = 0.23$ ,  $b_2 = 1$ ,  $a_3 = 0.5$ ,  $b_3 = 0.39$ ,  $d_3 = 0.02$  dan  $e_3 = 0.5$ , dicari melalui perhitungan dengan mempertimbangkan nilai  $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 > 0$  dan  $e_2 a_2 - d_2 > 0$  dengan nilai awal  $x_1(0) = 0.95$ ,  $x_2(0) = 0.85$  dan  $x_3(0) = 0.75$

Dari nilai parameter yang diberikan didapat titik kesetimbangan  $E_0 = (0, 0, 0)$  tidak stabil, titik  $E_1 = (0.23, 0, 0)$  stabil, titik  $E_2 = (0, 0.034, 0.712)$  tidak stabil, titik  $E_3 = (0.33, 0.12, 0)$  tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 3.



**Gambar 3.** Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 3

Keterangan :

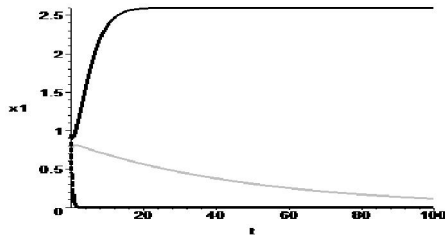
- : Populasi *prey*
- : Populasi *predator pertama*
- : Populasi *predator kedua*

**Kasus 4 :**

Untuk kasus 4 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu  $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 > 0$  dan  $e_2 a_2 - d_2 < 0$  menggunakan nilai parameternya  $r = 0.32$ ,  $K = 2.6$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $b_2 = 1.4$ ,  $d_2 = 2.9$  dan  $e_2 = 1.5$  [5], sedangkan untuk  $a_3 = 0.5$ ,  $b_3 = 0.39$ ,  $d_3 = 0.02$  dan  $e_3 = 0.5$ , dicari melalui perhitungan dengan mempertimbangkan nilai  $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 > 0$  dan  $e_2 a_2 - d_2 < 0$  dengan nilai awal  $x_1(0) = 0.95$ ,  $x_2(0) = 0.85$  dan  $x_3(0) = 0.75$

Dari nilai parameter yang diberikan didapat titik kesetimbangan  $E_0 = (0, 0, 0)$  tidak stabil, titik  $E_1 = (2.6, 0, 0)$  stabil, titik  $E_2 = (0, 0.034, 2.459)$  tidak stabil, titik  $E_3 = (6.246, 3.518, 0)$  tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 4.



**Gambar 4.** Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 4

Keterangan :

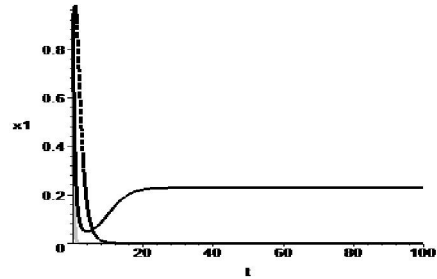
- : Populasi prey
- ⊖ : Populasi predator pertama
- ⊖ : Populasi predator kedua

**Kasus 5 :**

Untuk kasus 5 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu  $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 < 0$  dan  $e_2 a_2 - d_2 > 0$  menggunakan nilai parameternya  $r = 0.32$ ,  $a_2 = 1.6$ ,  $d_2 = 0.84$ ,  $e_2 = 2.1$ ,  $a_3 = 2.1$ ,  $b_3 = 2.3$ ,  $d_3 = 3.9$  dan  $e_3 = 0.2$  [5], sedangkan untuk  $K = 0.23$  dan  $b_2 = 1$ , dicari melalui perhitungan dengan mempertimbangkan nilai  $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 < 0$  dan  $e_2 a_2 - d_2 > 0$  dengan nilai awal  $x_1(0) = 0.95$ ,  $x_2(0) = 0.85$  dan  $x_3(0) = 0.75$

Dari nilai parameter yang diberikan didapat titik kesetimbangan  $E_0 = (0, 0, 0)$  tidak stabil, titik  $E_1 = (0.23, 0, 0)$  stabil, titik  $E_2 = (0, -2.578, 0.111)$  tidak stabil, titik  $E_3 = (0.333, -0.12, 0)$  tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 5.



**Gambar 5.** Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 5

Keterangan :

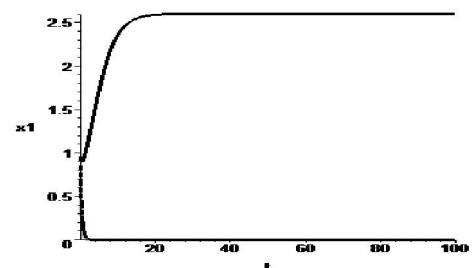
- : Populasi prey
- ⊖ : Populasi predator pertama
- ⊖ : Populasi predator kedua

**Kasus 6 :**

Untuk kasus 6 didapat dari hasil kombinasi nilai yaitu  $\frac{e_2 a_2 K}{b_2 + K} - d_2 < 0$ ,  $e_3 a_3 - d_3 < 0$  dan  $e_2 a_2 - d_2 < 0$  menggunakan nilai parameternya  $r = 0.32$ ,  $K = 2.6$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $b_2 = 1.4$ ,  $d_2 = 2.9$ ,  $e_2 = 1.5$ ,  $a_3 = 2.1$ ,  $b_3 = 2.3$ ,  $d_3 = 3.9$  dan  $e_3 = 0.2$  [5], dengan nilai awal  $x_1(0) = 0.95$ ,  $x_2(0) = 0.85$  dan  $x_3(0) = 0.75$

Dari nilai parameter yang diberikan didapat titik kesetimbangan  $E_0 = (0, 0, 0)$  tidak stabil, titik  $E_1 = (2.6, 0, 0)$  stabil, titik  $E_2 = (0, 2.578, 0.383)$  tidak stabil, titik  $E_3 = (6.246, 3.518, 0)$  tidak stabil.

Berikut diperlihatkan grafik perubahan dinamika populasi pada model rantai makanan tiga spesies pada kasus 6.



**Gambar 6.** Dinamika populasi dari rantai makanan tiga spesies pada kasus 6

## 7. PENUTUP

Pengaruh kehadiran *predator kedua* pada model rantai makanan tiga spesies untuk kasus pertama didapat dua hasil yaitu populasi *prey*, *predator pertama* dan *predator kedua* bertahan hidup secara periodik untuk waktu yang tak terbatas dan hasil kedua yaitu populasi *prey* dan *predator pertama* bertahan hidup secara periodik untuk waktu tak terbatas dan populasi *predator kedua* mengalami kepunahan.

Untuk kasus kedua didapat hasil yaitu populasi *prey* bertahan hidup dengan jumlah tertentu sampai waktu tak terbatas, sedangkan populasi *predator pertama* dan *predator kedua* mengalami kepunahan.

Untuk kasus ketiga didapat hasil yaitu populasi *prey* meningkat dan bertahan pada batas kapasitas daya tampung (*carrying capacity*), sedangkan populasi *predator pertama* dan *predator kedua* mengalami kepunahan.

## 8. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, Howard, (1988), *Aljabar Linier Elementer Edisi kelima*. Erlangga: Jakarta.
- [2] Dwidjoseputro, D., (1991), *Ekologi Manusia dengan Lingkungannya*. Erlangga: Jakarta.
- [3] Glenn, Ledder, (2005), *Differential Equation: A Modeling Approach*. McGraw-Hill Companies, Inc: New York.
- [4] Gwaltney, C. Ryan, et al., (2004), *Reliable Computation of Equilibrium States and Bifurcations in Food Chain Models*. University of Norre Dame: USA.
- [5] Khedhairi.AI. , (2009), *The Chaos Control of Chain Model Using Non Linier Feedback*. Applied Mathematics Sciences Journal. Volume 3 (2009), No. 12, 591-602.
- [6] Kimball, J.W., (1993), *Biologi Edisi Kelima Jilid Tiga*. Erlangga: Jakarta.
- [7] Zulfaedah, U.S., (2009), *Dinamika Sistem Mangsa - Pemangsa Fitoplankton-Zooplankton dengan Mangsa Fitoplankton yang Terinfeksi Virus Skripsi*. IPB : Bogor.