Model Predator dan Prey dengan Model Susceptible-Infected Susceptible

by Sunarsih Sunarsih

MODEL *PREDATOR* DAN *PREY* DENGAN MODEL *SUSCEPTIBLE - INFECTED – SUSCEPTIBLE*

Firsty Nur Hidayati[1], Sunarsih[2], Djuwandi[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika F.MIPA Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Abstract. A predator-prey model with infected prey is an interaction between a predator and a prey population with infected prey. This model is a result of the predator-prey model with logistic growth in the prey population which is combined with Susceptible-Infected-Susceptible (SIS) model in the prey. The equations in this model are non linear differential equation with three dependent variables. In this system, $H(t)$ is size of prey population at time t, $I(t)$ is the fraction of the prey that are infectious at time t and $P(t)$ is size of predator population at time t. It is assumed that infected prey are vulnerable than by a factor $q \geq 1$. Stability analysis system is done to all five equilibria in this linearized. Each of stability in those equilibria points is based on the eigen values.

Keywords: stability, SIS model, eigen value, equilibrium point

1. PENDAHULUAN

Interaksi populasi yang paling kelihatan adalah yang melibatkan pemangsaan (predasi, *predation*), dimana seekor pemangsa (*predator*) memakan mangsa (*prey*) [3]. Pemangsaan atau predasi diartikan sebagai pemanfaatan individu untuk memenuhi kebutuhan makanan bagi individu lain. Penggunaan satu individu oleh individu lain untuk makanan mempunyai pengaruh negatif pada pertumbuhan potensial populasi *prey*, dimana makanan biasanya diartikan dalam pengaruh yang positif pada pertumbuhan populasi *predator* [2]. Pada interaksi dua populasi tersebut, keberadaan populasi *prey* yang terinfeksi dapat berpengaruh pada pemangsaan oleh *predator* yaitu *prey* yang terinfeksi akan lebih lemah sehingga lebih mudah diserang untuk dimangsa oleh *predator*.

Model yang mendeskripsikan interaksi dua populasi yaitu *predator* dan *prey* dengan *prey* yang terinfeksi adalah model *predator* dan *prey* dengan *prey* yang terinfeksi. Dari model tersebut akan dicari solusi kesetimbangan dan dianalisis perilaku dari sistem yang dapat ditentukan dengan menganalisis kestabilan dari solusi kesetimbangan tersebut.

2. MODEL *PREDATOR* DAN *PREY* DENGAN *PREY* YANG TERIFEKSI

Model *predator* dan *prey* dengan *prey* yang terinfeksi diperoleh dari model *predator* dan *prey* dengan pertumbuhan logistik pada populasi *prey* yang dikombinasikan dengan model *Susceptible-Infected-Susceptible* (SIS) pada *prey*. Diasumsikan bahwa *prey* yang terinfeksi lebih mudah diserang untuk dimangsa oleh *predator* yang dinyatakan dengan q yang bernilai lebih besar atau sama dengan 1. Model *predator* dan *prey* dengan *prey* yang terinfeksi dinyatakan dengan sistem persamaan sebagai berikut [1].

$$\frac{dH}{dt} = \left[r\left(1-\frac{H}{K}\right)\right]H - a\left(X+qY\right)P \qquad (2.1.a)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(b-\theta r\frac{H}{K}\right)H - \left[d+(1-\theta)r\frac{H}{K}\right]X - \beta\frac{XY}{H} + \gamma Y - aXP \qquad (2.1.b)$$

$$\frac{dY}{dt} = \beta\frac{XY}{H} - \gamma Y - \left[d+(1-\theta)r\frac{H}{K}\right]Y - aqYP \qquad (2.1.c)$$

$$\frac{dP}{dt} = ka\left(X+qY\right)P - cP \qquad (2.1.d)$$

dengan

$H = X + Y$, $I = \dfrac{Y}{H}$ dan $S = \dfrac{X}{H} = 1 - I$

diperoleh sistem persamaan sebagai berikut

$$\frac{dH}{dt} = \left[r\left(1-\frac{H}{K}\right) - a\left(1+(q-1)I\right)P \right] H \quad (2.2.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \left[\beta(1-I) - \left(\gamma + b - \theta r \frac{H}{K}\right) - a(q-1)(1-I)P \right] I \quad (2.2.b)$$

$$\frac{dP}{dt} = \left[kaH\left(1+(q-1)I\right) - c \right] P \quad (2.2.c)$$

Ada lima solusi kesetimbangan model *predator* dan *prey* dengan *prey* yang terinfeksi yaitu $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (K,0,0)$,

$$E_2 = \left(\frac{c}{ka}, 0, \left(\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right)\right),$$

$$E_3 = \left(0, \left(1-\frac{\gamma+b}{\beta}\right), 0\right) \text{ dan}$$

$$E_4 = \left(K, \left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right), 0\right).$$

3. ANALISIS KESTABILAN SISTEM PERSAMAAN YANG DILINIERKAN

Persamaan (2.2.a), (2.2.b), dan (2.2.c) adalah sistem persamaan differensial non linier, untuk menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangannya, terlebih dahulu dilakukan pelinieran terhadap persamaan (2.2.a), (2.2.b), dan (2.2.c) dan kemudian persamaan dimisalkan dengan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dH}{dt} = rH - r\frac{H^2}{K} - aPH - aqIPH + aIPH$$
$$= U(H,I,P) \quad (2.3.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta I - \beta I^2 - \gamma I - bI$$
$$+ \theta r \frac{H}{K} I - aqPI + aqI^2 P + aPI - aI^2 P$$
$$= V(H,I,P) \quad (2.3.b)$$

$$\frac{dP}{dt} = kaHP + kaHqIP - kaHIP - cP$$
$$= W(H,I,P) \quad (2.3.c)$$

Kemudian, didefinisikan $O_1 = H - H^*$, $O_2 = I - I^*$ dan $O_3 = P - P^*$ dengan H^*, I^* dan P^* merupakan suatu konstanta, maka $\frac{dO_1}{dt} = \frac{dH}{dt}$, $\frac{dO_2}{dt} = \frac{dI}{dt}$ dan $\frac{dO_3}{dt} = \frac{dP}{dt}$. Dengan demikian linierisasi dari persamaan (2.2.a), (2.2.b) dan (2.2.c) dengan menggunakan deret Taylor di titik (H^*, I^*, P^*) adalah sebagai berikut :

$$\frac{dO_1}{dt} = \left[r\left(1-\frac{2H^*}{K}\right) - aP^*\left(1+(q-1)I^*\right) \right] O_1$$
$$+ \left[-aH^* P^* (q-1) \right] O_2$$
$$+ \left[-aH^* \left(1+(q-1)I^*\right) \right] O_3 \quad (2.4.a)$$

$$\frac{dO_2}{dt} = \left(\theta r \frac{I^*}{K}\right) O_1$$
$$+ \left[\left(\beta - aP^*(q-1)\right)\left(1-2I^*\right) - \left(\gamma + b - \theta r \frac{H^*}{K}\right) \right] O_2$$
$$+ \left[-aI^* (q-1)(1-I^*) \right] O_3 \quad (2.4.b)$$

$$\frac{dO_3}{dt} = \left[kaP^* \left(1+(q-1)I^*\right) \right] O_1$$
$$+ \left[kaH^* P^* (q-1) \right] O_2$$
$$+ \left[kaH^* \left(1+(q-1)I^*\right) - c \right] O_3 \quad (2.4.c)$$

Dari linierisasi di atas, diperoleh matriks Jacobian pada titik kesetimbangan (H^*, I^*, P^*) yaitu:

$$J(H^*, I^*, P^*) = \begin{bmatrix} a_{11} & -aH^* P^*(q-1) & -aH^*\left(1+(q-1)I^*\right) \\ \theta r \frac{I^*}{K} & a_{22} & -aI^*(q-1)(1-I^*) \\ kaP^*\left(1+(q-1)I^*\right) & kaH^* P^*(q-1) & kaH^*\left(1+(q-1)I^*\right) - c \end{bmatrix}$$

dengan:

$$a_{11} = r\left(1-\frac{2H^*}{K}\right) - aP^*\left(1+(q-1)I^*\right)$$

$$a_{22} = \left(\beta - aP^*(q-1)\right)\left(1-2I^*\right) - \left(\gamma + b - \theta r \frac{H^*}{K}\right)$$

Dianalisis perilaku kestabilan dari persamaan (2.2.a), (2.2.b), dan (2.2.c) dengan cara mensubstitusi nilai dari masing-masing titik kesetimbangan ke dalam persamaan (2.4.a), (2.4.b) dan (2.4.c) sebagai berikut.

a) **Titik 1:** $E_0 = (0,0,0)$

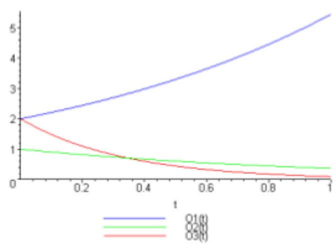
Dengan mensubstitusikan titik $E_0 = (0,0,0)$ ke dalam persamaan (2.4.a), (2.4.b) dan (2.4.c), diperoleh sistem yang dilinierkan sebagai berikut.

$$\frac{dO_1}{dt} = rO_1 \qquad (2.5.a)$$

$$\frac{dO_2}{dt} = (\beta - \gamma - b)O_2 \qquad (2.5.b)$$

$$\frac{dO_3}{dt} = -cO_3 \qquad (2.5.c)$$

Nilai eigen dari persamaan (2.5.a), (2.5.b) dan (2.5.c) adalah $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = \beta - \gamma - b$, dan $\lambda_3 = -c$. Dengan demikian, titik $E_0 = (0,0,0)$ tidak stabil karena $\lambda_1 = r > 0$. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ dengan $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ $(\lambda_2 > \lambda_3)$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ untuk $E_0 = (0,0,0)$ dengan $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ $(\lambda_2 > \lambda_3)$.

Dari Gambar 1. dapat dilihat bahwa populasi *prey* meningkat sampai pada jumlah yang tidak terbatas. Sedangkan populasi *predator* dan populasi *prey* yang menular per total populasi *prey* semakin berkurang.

b) **Titik 2:** $E_1 = (K,0,0)$

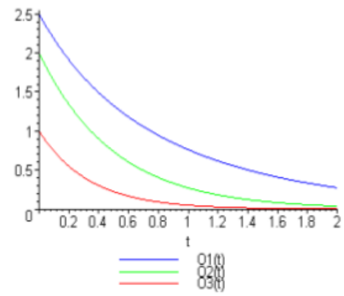
Dengan mensubstitusikan titik $E_1 = (K,0,0)$ ke dalam persamaan (2.4.a), (2.4.b) dan (2.4.c), diperoleh sistem yang dilinierkan sebagai berikut.

$$\frac{dO_1}{dt} = -rO_1 - aKO_3 \qquad (2.6.a)$$

$$\frac{dO_2}{dt} = (\beta - \gamma - b + \theta r)O_2 \qquad (2.6.b)$$

$$\frac{dO_3}{dt} = (kaK - c)O_3 \qquad (2.6.c)$$

Nilai eigen dari persamaan (2.6.a), (2.6.b) dan (2.6.c) adalah $\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = \beta - \gamma - b + \theta r$, dan $\lambda_3 = kaK - c$. Dengan demikian, titik $E_1 = (K,0,0)$ stabil jika λ_2 dan λ_3 yang bernilai riil non positif. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ dengan $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$) digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ untuk $E_1 = (K,0,0)$ dengan $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ $(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3)$

Dari Gambar 2. dapat dilihat bahwa populasi *prey*, populasi *prey* yang menular per total populasi *prey* dan populasi *predator* semakin berkurang.

c) **Titik 3:** $E_2 = \left(\frac{c}{ka}, 0, \left(\frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{kaK}\right)\right)\right)$

Dengan mensubstitusikan titik $E_2 = \left(\frac{c}{ka}, 0, \left(\frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{kaK}\right)\right)\right)$ ke dalam persamaan (2.4.a), (2.4.b) dan (2.4.c), diperoleh sistem yang dilinierkan sebagai berikut.

$$\frac{dO_1}{dt} = \left(-\frac{rc}{kaK}\right)O_1 \qquad (2.7.a)$$

$$+\left[-\frac{cr}{ka}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)(q-1)\right]O_2 - \frac{c}{k}O_3$$

$$\frac{dO_2}{dt} = \left[\left(\beta - r(q-1)\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right) - \left(\gamma + b - \theta r\frac{c}{kaK}\right)\right]O_2$$

$$\frac{dO_3}{dt} = \left(kr\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right)O_1 + \left(\frac{cr}{a}\left(1-\frac{c}{kaK}\right)(q-1)\right)O_2$$

Nilai eigen dari persamaan (2.7.a), (2.7.b) dan (2.7.c) adalah:

$$\lambda_1 = \left(\beta - r(q-1)\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right) - \left(\gamma + b - \theta r\frac{c}{kaK}\right)$$

dan

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\dfrac{rc}{kaK} \pm \sqrt{\dfrac{r^2c^2}{k^2a^2K^2} - 4\left(rc - \dfrac{rc^2}{kaK}\right)}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{rc}{kaK} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2c^2}{k^2a^2K^2} - 4rc\left(1-\frac{c}{kaK}\right)}.$$

Dengan demikian, titik $E_2 = \left(\dfrac{c}{ka}, 0, \left(\dfrac{r}{a}\left(1-\dfrac{c}{kaK}\right)\right)\right)$ stabil jika $\dfrac{kaK}{c} > 1$ dan

$$\lambda_1 = \left(\beta - r(q-1)\left(1-\frac{c}{kaK}\right)\right) - \left(\gamma + b - \theta r\frac{c}{kaK}\right)$$

bernilai riil non positif.

d) Titik 4: $E_3 = \left(0, \left(1-\dfrac{\gamma+b}{\beta}\right), 0\right)$

Dengan mensubstitusikan titik $E_3 = \left(0, \left(1-\dfrac{\gamma+b}{\beta}\right), 0\right)$ ke dalam persamaan (2.4.a), (2.4.b) dan (2.4.c), diperoleh sistem yang dilinierkan sebagai berikut

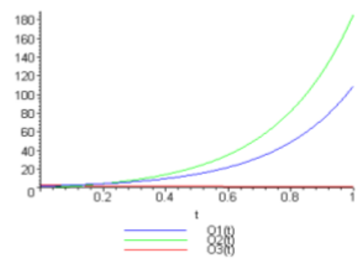
$$\frac{dO_1}{dt} = rO_1 \qquad (2.8.a)$$

$$\frac{dO_2}{dt} = \left(\theta r\frac{1}{K}\left(1-\frac{\gamma+b}{\beta}\right)\right)O_1 + (-\beta+\gamma+b)O_2$$

$$+\left[-a\left(1-\frac{\gamma+b}{\beta}\right)(q-1)\left(\frac{\gamma+b}{\beta}\right)\right]O_3 \qquad (2.8.b)$$

$$\frac{dO_3}{dt} = -cO_3 \qquad (2.8.c)$$

Nilai eigen dari persamaan (2.9.a), (2.9.b) dan (2.9.c) adalah $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = -\beta + \gamma + b$, dan $\lambda_3 = -c$. Dengan demikian, titik $E_3 = \left(0, \left(1-\dfrac{\gamma+b}{\beta}\right), 0\right)$ tidak stabil karena $\lambda_1 = r > 0$. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ dengan $0 < \theta \le 1$, $q > 1$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ ($\lambda_2 < \lambda_3$) digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ untuk $E_3 = \left(0, \left(1-\dfrac{\gamma+b}{\beta}\right), 0\right)$ dengan $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ ($\lambda_2 < \lambda_3$).

Dari Gambar 3. dapat dilihat bahwa populasi *prey* dan populasi *prey* yang menular per total populasi *prey* meningkat sampai pada jumlah yang tidak terbatas serta populasi *predator* semakin berkurang.

e) Titik 5: $E_4 = \left(K, \left(1-\dfrac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right), 0\right)$

Dengan mensubstitusikan titik $E_4 = \left(K, \left(1-\dfrac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right), 0\right)$ ke dalam persamaan (2.5.a), (2.5.b) dan (2.5.c), diperoleh sistem yang dilinierkan sebagai berikut.

$$\frac{dO_1}{dt} = -rO_1 + \left[-aK\left(1+(q-1)\left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right)\right)\right]O_3 \quad (2.9.a)$$

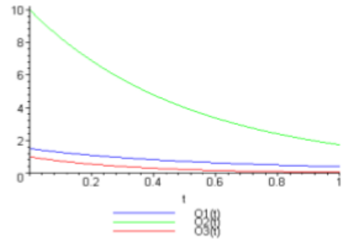
$$\frac{dO_2}{dt} = \left(\theta r\frac{1}{K}\left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right)\right)O_1 + (-\beta+\gamma+b-\theta r)O_2 \quad (2.9.b)$$

$$+\left[-a\left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right)(q-1)\left(\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right)\right]O_3$$

$$\frac{dO_3}{dt} = \left[kaK\left(1+(q-1)\left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right)\right)-c\right]O_3 \quad (2.9.c)$$

Nilai eigen dari persamaan (2.9.a), (2.9.b) dan (2.9.c) adalah $\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = -\beta+\gamma+b-\theta r$, dan $\lambda_3 = kaK\left(1+(q-1)\left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right)\right)-c$.

Dengan demikian, titik $E_4 = \left(K,\left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right),0\right)$ stabil jika $\frac{\beta}{\gamma+b-\theta r} > 1$ dan $\lambda_3 = kaK\left(1+(q-1)\left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right)\right)-c$ bernilai riil non positif. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ dengan $0<\theta\le 1$, $q>1$, $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, dan $\lambda_3<0$ $(\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3)$ digambarkan sebagai berikut.

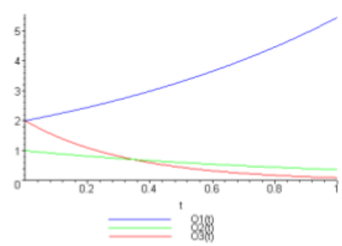


Gambar 4. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ untuk $E_4 = \left(K,\left(1-\frac{\gamma+b-\theta r}{\beta}\right),0\right)$ dengan $\lambda_1<0$ $\lambda_2<0$, dan $\lambda_3<0$ $(\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3)$.

Dari Gambar 4. dapat dilihat bahwa populasi *prey*, populasi *prey* yang menular per total populasi *prey* dan populasi *predator* semakin berkurang.

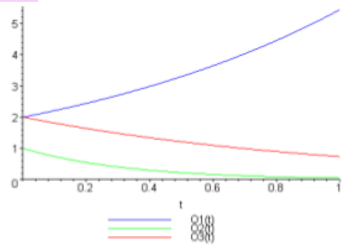
Secara simulasi masih dapat ditunjukkan perilaku kestabilan dari masing-masing kurva $O_1(t), O_2(t), O_3(t)$ untuk persamaan (2.2.a), (2.2.b) dan (2.2.c) dengan tiga kemungkinan yaitu $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ dan $\lambda_3<0$

- $\lambda_2>\lambda_3$



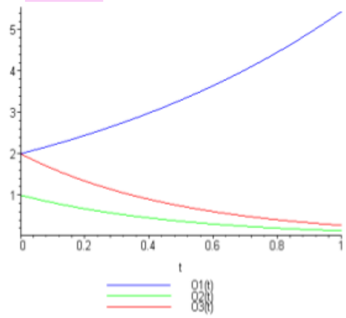
Gambar 5. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ da $O_3(t)$ untuk $E_0 = (0,0,0)$ dengan $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ dan $\lambda_3<0$ $(\lambda_2>\lambda_3)$.

- $\lambda_2 < \lambda_3$



Gambar 6. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ untuk $E_0 = (0,0,0)$ dengan $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ ($\lambda_2 < \lambda_3$).

- $\lambda_2 = \lambda_3$



Gambar 7. Grafik $O_1(t)$, $O_2(t)$ dan $O_3(t)$ untuk $E_0 = (0,0,0)$ dengan $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ ($\lambda_2 = \lambda_3$).

Dari Gambar 5, 6, dan 7. dapat dilihat bahwa populasi *prey* meningkat sampai pada jumlah yang tidak terbatas. Sedangkan populasi *predator* dan populasi *prey* yang menular per total populasi *prey* semakin berkurang.

4. PENUTUP

Model *predator* dan *prey* dengan *prey* yang terinfeksi merupakan sistem persamaan differensial non linier yang mempunyai tiga variabel tidak bebas yaitu $H(t)$ yang menyatakan jumlah populasi *prey* pada waktu t, $I(t)$ yang menyatakan jumlah populasi *prey* yang menular per total populasi *prey* pada waktu t dan $P(t)$ yang menyatakan jumlah populasi *predator* pada waktu t. Dari sistem tersebut dicari solusi kesetimbangan sehingga diperoleh lima titik kesetimbangan dan pada tiap-tiap titik kesetimbangan tersebut dilakukan analisis kestabilan pada sistem yang dilinerkan yang berdasar pada nilai-nilai eigennya.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Hethcote, H. W, Wendy Wang, Litao Han, and Zhien Ma, (2004), *A Predator-Prey Model with Infected Prey*. Journal of Theoretical Population Biology. 66 (September 13): 259-268. http://www.elseiver.com/locate/ytpbi. (accessed November 12, 2009).

[2]. McNaughton, S. J and Larry L Wolf, (1990), *Ekologi Umum*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

[3]. Neil, A. C, Jane B Reece, and Lawrence G Mitchel, (2004), *Biologi edisi kelima jilid 3*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Model Predator dan Prey dengan Model Susceptible-Infected Susceptible

ORIGINALITY REPORT

18%	8%	6%	14%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	id.scribd.com Internet Source	5%
2	Submitted to The Hong Kong Polytechnic University Student Paper	5%
3	a-research.upi.edu Internet Source	2%
4	Li, Jianquan. "Ordinary Differential Equations Epidemic Models", Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics, 2009. Publication	2%
5	Submitted to University of Arizona Student Paper	1%
6	eprints.undip.ac.id Internet Source	1%
7	Sadri Hassani. "Relativity in Four Dimensions", Elsevier BV, 2017 Publication	1%

8	Submitted to Universiti Sains Malaysia Student Paper	<1%

Exclude quotes	Off	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	Off		