

SKRIPSI

**TEOREMA HAHN BANACH DAN BENTUK GEOMETRINYA PADA
HIMPUNAN KONVEKS**

***THE HAHN-BANACH THEOREM AND ITS GEOMETRIC FORM OF ON
CONVEX SETS***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat Sarjana
Matematika (S.Mat.)



Kalam Satya Graha

24010122140133

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG**

2026

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

TEOREMA HAHN BANACH DAN BENTUK GEOMETRINYA PADA
HIMPUNAN KONVEKS

Telah dipersiapkan dan disusun oleh:

KALAM SATYA GRAHA

240101221403

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 10 April 2026

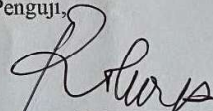
Susunan Tim Penguji

Pembimbing II/Penguji,



Bagus Arya Saputra, S.Si., M.Si.
NIP. 199607092024061001

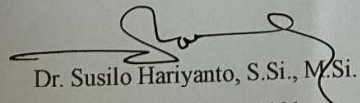
Penguji,



Robertus Heri Soelistyo
Utomo S.Si., M.Si.
NIP. 197202031998021001

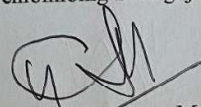
Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika,



Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si.
NIP. 197410142000121001

Pembimbing I/Penguji,



Drs. Y D Sumanto, M.Si.
NIP. 1964090181993031002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa Skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, 3 Maret 2026

Kalam Satya Graha

Kupersembahkan karya ini untuk:

*Mama, Papa, Om Agus, Ibu Wiwin Mbak
Wendy, Alm Sheika Safira, semua orang yang
menemaniku dalam bertumbuh dan
berproses, serta group band GOJIRA dan
TOOL yang menemani dalam mengerjakan
skripsi ini.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadiran Tuhan Yang Maha Esa, karena dengan rahmat, nikmat serta karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan penyusunan Tugas Akhir dengan judul ” *Teorema Hahn Banach dan Bentuk Geometri Teorema Hahn Banach pada Himpunan Konveks,*” yang disusun sebagai syarat penyelesaian program studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.

Selama penyusunan Tugas Akhir ini, penulis menyadari bahwa keberhasilan ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak yang mengelilingi penulis. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dr. Susilo Hariyanto, S.si., M.Si selaku Ketua Prodi S1 Matematika Universitas Diponegoro, sekaligus Dosen Pembimbing II yang telah memberikan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
2. Drs. Yusephus Decupertino Sumanto, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, ilmu, dan arahan selama proses penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Orang tua, keluarga, teman-teman serta semua pihak yang telah memberikan dukungan dan bantuan yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa laporan Tugas Akhir ini masih jauh dari kata sempurna serta masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis berharap kritik serta saran yang membangun guna perbaikan di masa yang akan datang. Semoga laporan Tugas Akhir ini bermanfaat sebagai bahan untuk penelitian lebih lanjut mengenai topik terkait.

Semarang, 5 Mei 2025

Kalam Satya Graha

DAFTAR ISI

HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
PERNYATAAN.....	iii
KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI	vi
DAFTAR ARTI LAMBANG.....	viii
DAFTAR GAMBAR	ix
ABSTRAK.....	x
ABSTRACT.....	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan dan Manfaat	2
1.4.1 Tujuan	2
1.4.2 Manfaat	3
1.5 Metodologi Penelitian	3
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II LANDASAN TEORI	6
2.1 Himpunan	6
2.1.1 Himpunan Bagian	6
2.1.2 Operasi Himpunan	7
2.1.3 Himpunan Terurut Parsial	8
2.1.4 Lemma Zorn	9
2.2. Fungsi	10
2.3 Ruang	11
2.3.1 Ruang Vektor	11
2.3.2 Ruang Bagian Pada Ruang Vektor	12
2.3.3 Ruang Vektor Bernorma	13
2.3.4 Operator Linear	14

2.3.5 Operator Linear Kontinu dan Terbatas.....	17
2.3.6 Lemma (Norma).....	17
2.3.7 Teorema Kekontinuan dan Keterbatasan Pada Operator Linear.	19
2.3.8 Fungsional Linear	21
2.3.9 Ruang Ruang Dual.....	21
2.4 Himpunan Terbuka, Himpunan Tertutup,dan Himpunan Konveks pada Ruang Vektor Bernorma.....	30
2.4.1 Bola dan Selimut Bola.....	30
2.4.2 Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup.....	31
2.4.3 Himpunan Konveks	32
BAB III PEMBAHASAN	35
3.1 Bentuk Analitik Teorema Hahn-Banach	35
3.2 Bentuk Geometri dari Teorema Hahn-Banach	59
3.2.4 Bentuk Pertama Geometri Hahn-Bannach	76
3.2.5 Hahn-Bannach, Bentuk Geometri Kedua.....	81
BAB IV PENUTUP	91
4.1 Kesimpulan	91
4.2 Saran.....	91
DAFTAR PUSTAKA	93
LAMPIRAN.....	94

DAFTAR ARTI LAMBANG

E	:	Ruang vektor bernorma
$G \subset E$:	Ruang bagian dari E
C	:	Himpunan konveks
$\alpha, \epsilon, \lambda, \eta, \zeta, t$:	Konstanta bilangan riil
H	:	<i>Affine Hyperplane</i>
$f: E \rightarrow \mathbb{R}$:	Pemetaan f dari domain ruang vektor bernorma ke bilangan riil
\forall	:	Untuk setiap
E^*	:	Himpunan dengan anggota-anggotanya fungsional linear kontinu
(P, \leq)	:	Himpunan terurut parsial
\mathcal{Q}	:	Koleksi himpunan terurut dari fungsi h_i
\mathcal{T}	:	Koleksi operator linear
\mathbf{x}	:	Vektor
\Rightarrow	:	Mengakibatkan
\Leftarrow	:	Diakibatkan oleh
\cap	:	Irisan
\cup	:	Gabungan
\rightarrow	:	Konvergen ke
$\langle f, \mathbf{x} \rangle$:	Dot produk fungsi f dengan vektor \mathbf{x}
\bar{G}	:	<i>Closure</i> dari himpunan G
$B(X, Y)$:	Himpunan semua operator linear dengan <i>domain</i> X dan <i>range</i> Y

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Visualisasi ruas garis a_1 dengan a_2 di C	34
Gambar 3.1	Visualisasi Hyperplane $H = \{x + y + z = 2\}$	61
Gambar 3.2	Visualisasi $x = 8,6$ pada $C = \{x, y \mid x^2 + y^2 < 25\}$ di \mathbb{R}^2	71
Gambar 3.3	Visualisasi $C = \{x^2 + y^2 - 20x + 75 < 0\}$ dengan titik pusat $(10,0)$ dan vektor x yang tidak berada dalam C	73
Gambar 3.4	Visualisasi pemisahan himpunan A dengan B oleh $f(\mathbf{z})$	81
Gambar 3.5	Pemisahan secara tegas himpunan A dan B oleh affine hyperplane $H = \{f(x, y) = x - y\}$	87

ABSTRAK

TEOREMA HAHN BANACH DAN BENTUK GEOMETRINYA PADA HIMPUNAN KONVEKS

oleh

KALAM SATYA GRAHA

240101221403

Penelitian ini membahas Teorema Hahn-Banach dalam ruang vektor bernorma, dimulai dari bentuk analitik dan pembuktian teorema sampai dengan bentuk geometri dari teorema tersebut. Bentuk analitik Teorema Hahn-Banach menyatakan bahwa setiap fungsional linear yang terdefinisi pada ruang bagian dari vektor bernorma dibatasi oleh fungsi sehingga dapat diperluas menjadi fungsional linear yang terdefinisi pada seluruh ruang vektor bernorma tanpa melanggar batas fungsi tersebut. Keberadaan dari perluasan ini dibuktikan dengan menggunakan Lemma Zorn, yang menegaskan peranan dari himpunan terurut parsial dalam menjamin eksistensi dari fungsional yang memperluas. Dari Teorema Hahn-Banach didapatkan beberapa akibat yaitu terjaminnya preservasi norma, terjaminnya setiap vektor memiliki fungsional pendukung sehingga pertidaksamaan fungsional linear menjadi persamaan, tercapainya nilai maksimum. Representasi geometris teorema ini digunakan untuk pemisahan himpunan-himpunan konveks di ruang vektor bernorma riil yang dipisahkan oleh suatu *affine hyperplane*.

Kata kunci: Ruang vektor bernorma, Fungsional linear terbatas dan terbatas, *Affine hyperplane*, Himpunan konveks.

ABSTRACT

THE HAHN-BANACH THEOREM AND ITS GEOMETRIC FORM OF ON CONVEX SETS

by

KALAM SATYA GRAHA

240101221403

This research discusses the Hahn-Banach Theorem in normed vector spaces, beginning from the analytic form and proof of the theorem to its geometric form. The analytic form of the Hahn-Banach Theorem states that every linear functional defined on a subspace of a normed vector space is bounded by a function such that it can be extended to a linear functional defined on the entire normed vector space without violating the boundedness of that function. The existence of this extension is proven using Zorn's Lemma, which highlights the role of partially ordered sets in guaranteeing the existence of the extending functional. From the Hahn-Banach Theorem, several consequences follow: the preservation of the norm is guaranteed; every vector has a supporting functional, so that linear functional inequalities become equations; and the attainment of a maximum value is ensured. The geometric representation of this theorem is used to separate convex sets in a real normed vector space separated by an affine hyperplane.

Keywords: Normed vector spaces, Bounded and continued linear functionals, Affine Hyperplane, Convex sets.