

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf memiliki banyak topik yang dapat dipelajari, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah pemberian bilangan bulat pada titik atau sisi atau face dengan syarat tertentu [1]. Konsep pelabelan graf diperkenalkan oleh Rosa [2] dalam konteks pelabelan titik. Berbagai jenis pelabelan graf telah diperkenalkan, salah satunya adalah pelabelan *magic* dan *antimagic*.

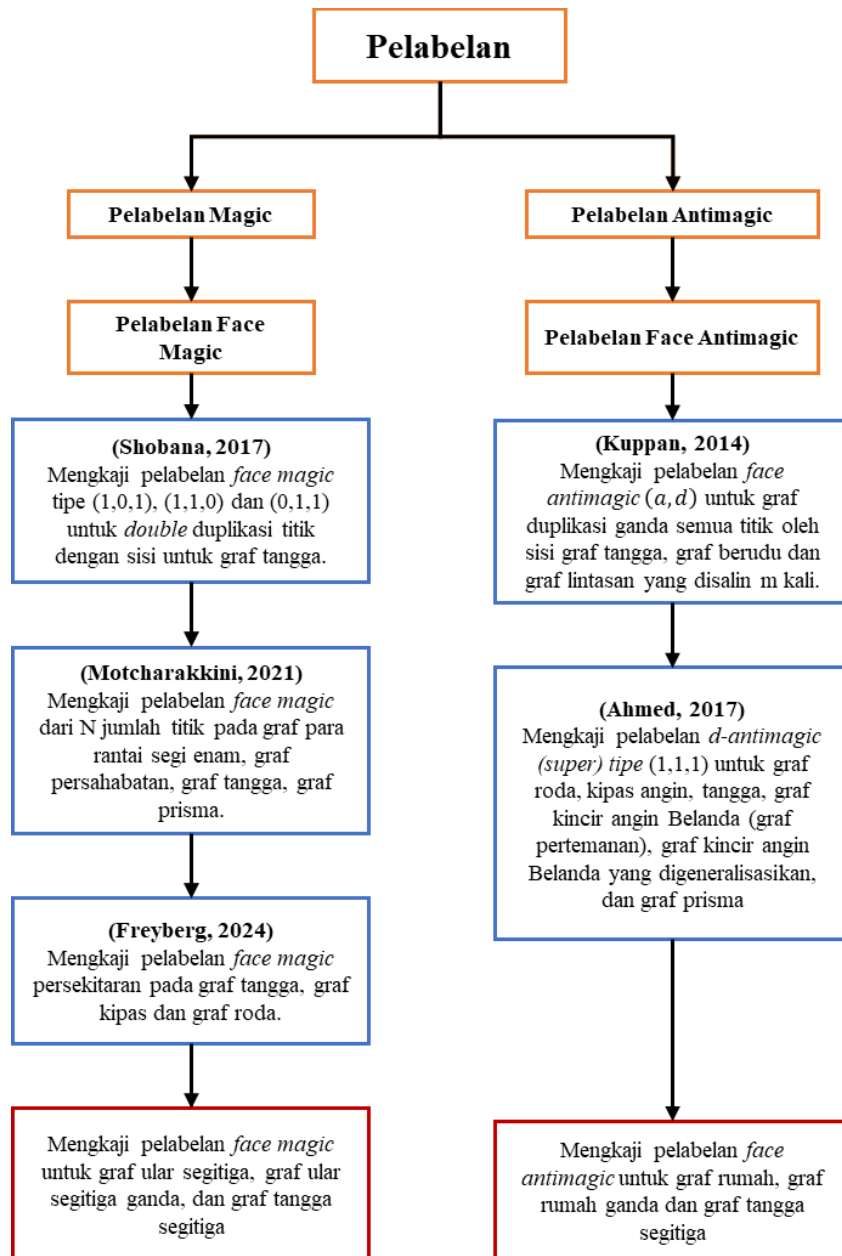
Pelabelan *magic* diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa [3] sebagai fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G) + E(G)|\}$, dengan $V(G)$ dan $E(G)$ masing-masing menotasikan himpunan titik dan sisi dari suatu graf, sedemikian sehingga untuk semua sisi ab , bobot ab yang didefinisikan $f(a) + f(b) + f(ab)$ bernilai konstan [4]. Nilai konstan ini disebut konstanta *magic*. Berbagai aplikasi pelabelan graf mencakup permasalahan dekomposisi graf, perancangan kode pulsa radar, kristalografi sinar-X, serta pemodelan jaringan komunikasi [3].

Pelabelan graf telah banyak berkembang menjadi berbagai jenis, antara lain pelabelan *magic* titik, pelabelan *magic* sisi, pelabelan *magic* total, pelabelan *antimagic* titik, pelabelan *antimagic* sisi, pelabelan *face magic*, pelabelan *face antimagic* [5]. Pelabelan *face magic* didefinisikan sebagai suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan titik, sisi, dan *face* dari suatu graf bidang ke himpunan bilangan bulat, sedemikian sehingga bobot setiap *face* adalah sama [1]. Sementara itu, pelabelan *face antimagic* didefinisikan sebagai suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan titik, sisi, dan *face* dari suatu graf bidang ke himpunan bilangan bulat, sedemikian sehingga bobot setiap *face* adalah berbeda [6]. Bobot *face* didefinisikan jumlah label titik, label sisi, dan label *face* yang membatasi *face* tersebut [6]. Pelabelan *face magic* dan *face antimagic* bertipe (1,1,1) pada graf bidang G adalah fungsi dari himpunan titik, sisi, dan *face* ke himpunan $\{1, 2, \dots, p + q + r\}$, dengan p adalah banyaknya titik, q adalah banyaknya sisi, dan r adalah banyaknya *face* sedemikian sehingga setiap titik, sisi, dan *face* menerima tepat satu label, dan setiap bilangan digunakan tepat satu kali sebagai label [5]. Pada

pelabelan *face magic* tipe (1,1,1) bobot setiap *face* adalah sama, sedangkan pada pelabelan *face antimagic* tipe (1,1,1) bobot setiap *face* adalah berbeda.

Pelabelan *face magic* telah banyak dibahas dan diaplikasikan pada berbagai jenis graf, seperti graf tenda yang terkait dengan graf *grid* [7], graf tangga, graf kipas, graf roda [8], graf \mathcal{P}_{mn} [9], dan graf *grid* botol Klein [9]. Tren yang sama juga terlihat pada pelabelan *face antimagic*. Beberapa penelitian [5, 10] membahas pelabelan *d-antimagic* tipe (1,1,1). Pelabelan tipe ini merupakan penggabungan pelabelan tipe (1,1,1), yang memberikan label unik ke titik, sisi, dan *face*, dan *d-antimagic*, pengembangan dari pelabelan *antimagic* yang diperkenalkan oleh Baca dan Miller [11]. Ahmed [10] menginvestigasi pelabelan *face antimagic* untuk graf bidang dengan strong face, untuk $d = 0,1,2$, ke bentuk graf bidang dengan *Strong Face* dari graf roda, graf tangga, serta graf pertemanan dan generalisasinya. Sementara itu, Siddiqui dkk [5] membahas eksistensi pelabelan *face antimagic* untuk graf jahangir. Penelitian lain oleh Kuppan & Shobana [12] membahas pelabelan *face antimagic* untuk bentuk duplikasi berganda (*double duplication*) dari graf tangga, graf berudu, dan graf lintasan yang disalin m kali.

Lebih lanjut, diberikan *state of the art* perkembangan penelitian terkait pelabelan *face magic* dan *face antimagic*. Bagan ini menunjukkan bagaimana konsep pelabelan berkembang dari permasalahan klasik hingga ke penerapan konsep pelabelan *face magic* dan *face antimagic* pada berbagai jenis graf, yaitu graf ular segitiga, graf ular segitiga ganda, graf rumah, graf rumah ganda, dan graf tangga segitiga.



Gambar 1.1 State of the Art

Keterangan:

: submateri dari jenis pelabelan

: bagian yang sudah diteliti oleh peneliti terdahulu

: yang diteliti

Pada penelitian ini, dikaji tentang pelabelan *face magic* pada graf ular segitiga, graf ular segitiga ganda, graf tangga segitiga dan *face antimagic* pada graf rumah, graf rumah ganda, graf tangga segitiga.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang dibahas pada tesis ini adalah:

1. Bagaimana mengkonstruksi pelabelan *face magic* pada graf ular segitiga, graf ular segitiga ganda, graf tangga segitiga?
2. Bagaimana mengkonstruksi pelabelan *face antimagic* pada graf tangga segitiga, graf rumah, graf rumah ganda?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Membuktikan bahwa graf ular segitiga, graf ular segitiga ganda, graf tangga segitiga mempunyai pelabelan *face magic*.
2. Membuktikan bahwa graf rumah, graf rumah ganda, graf tangga segitiga mempunyai pelabelan *face antimagic*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk menambah wawasan pembaca mengenai teori graf, khususnya mengenai cara mengkonstruksi pelabelan *face magic* pada graf ular segitiga, graf ular segitiga ganda, graf tangga segitiga dan *face antimagic* pada graf rumah, graf rumah ganda, graf tangga segitiga dan diharapkan dapat menjadi sumbangan penelitian dan disiplin ilmu khususnya dalam bidang graf.

1.5 Sistematika Penulisan

Penelitian ini disusun dalam empat bab utama, yaitu Pendahuluan, Tinjauan Pustaka dan Landasan Teori, Hasil dan Pembahasan, serta Penutup.

Bab I Pendahuluan menjelaskan gambaran umum penelitian yang mencakup latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, serta sistematika penulisan laporan secara keseluruhan.

Bab II Tinjauan Pustaka dan Landasan Teori memuat teori-teori dan hasil penelitian sebelumnya yang mendukung pengembangan model pada penelitian ini. Pada bagian ini dibahas konsep yang berkaitan dengan tinjauan pustaka pada penelitian ini, Landasan teori meliputi graf, *adjacent*, *incident*, sisi ganda, gelang, graf

sederhana, *walk*, *trail*, *path*, *cycle*, graf terhubung, graf tidak terhubung, graf bidang terhubung, graf berhingga, graf bidang berhingga, graf tangga, fungsi meliputi fungsi injektif, fungsi surjektif, fungsi bijektif, serta pelabelan meliputi pelabelan titik, pelabelan sisi, pelabelan total, bobot *face*, pelabelan *magic*, pelabelan *antimagic*, pelabelan tipe (1,1,1).

Bab III Metode Penelitian menjelaskan langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini. Langkah-langkah tersebut mencakup studi literatur, konstruksi graf-graf yang digunakan, pelabelan *face magic* dan *face antimagic* pada graf-graf tersebut, pembentukan teorema berdasarkan pelabelan yang dilakukan, dan penarikan kesimpulan.

Bab IV Hasil dan Pembahasan merupakan inti dari penelitian ini. Bab ini juga mencakup pelabelan *face magic*, pelabelan *face magic* pada graf ular segitiga beserta graf ular segitiga, pelabelan *face magic* pada graf ular segitiga ganda beserta graf ular segitiga ganda, pelabelan *face magic* pada graf tangga segitiga beserta graf tangga segitiga, pelabelan *face antimagic* pada graf rumah beserta graf rumah, pelabelan *face antimagic* pada graf rumah ganda beserta graf rumah ganda, pelabelan *face antimagic* pada graf tangga segitiga beserta graf tangga segitiga. Selain itu, ditampilkan pula hasil implementasi program Python dari pelabelan *face magic* pada graf ular segitiga, graf ular segitiga, dan graf tangga segitiga serta pelabelan *face antimagic* pada graf rumah, graf rumah ganda, dan graf tangga segitiga.

Bab V Penutup menyajikan kesimpulan dari hasil penelitian yang telah diperoleh serta saran yang dapat dijadikan bahan pertimbangan bagi penelitian selanjutnya maupun pihak yang tertarik untuk mengembangkan studi serupa.