

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dimensi metrik merupakan salah satu topik penelitian dalam teori graf yang telah berkembang saat ini. Topik ini pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 dan secara terpisah oleh Melter & Harary pada tahun 1976 pada jurnal yang berjudul *on the metric dimension of a graph* [1]. Dimensi metrik dan himpunan pembeda adalah salah satu konsep yang menggunakan jarak untuk membedakan setiap titik yang berbeda di suatu graf [2]. Konsep jarak pada graf diperoleh dengan memperhatikan lintasan terpendek yang menghubungkan antar titik pada graf.

Dimensi metrik digunakan untuk menentukan sumber penyebaran dalam jaringan, analisis label graf, meningkatkan akurasi klasifikasi DNA, mengoptimalkan penempatan sensor dalam jaringan pipa yang mengangkut bahan kimia berbahaya, penentuan lokasi stasiun pangkalan yang optimal, meminimalkan pemasangan sensor api pada gedung, mengoptimalkan penentuan posisi dalam jaringan sensor nirkabel.

Penelitian dalam teori graf terus berkembang khususnya pada konsep dimensi metrik yang telah memunculkan konsep-konsep baru. Salah satu konsep pengembangan dimensi metrik yaitu konsep dimensi metrik lokal [3] yang kemudian dikembangkan menjadi konsep dimensi metrik nonlokal [4]. Selanjutnya, pengembangan dimensi metrik juga dilakukan dengan memperkenalkan dimensi metrik komplemen [5] yang kemudian dikembangkan lagi menjadi dimensi metrik komplemen lokal [6].

Penelitian mengenai dimensi metrik graf mencakup berbagai aspek, seperti dimensi metrik lokal, dimensi metrik nonlokal, dan dimensi metrik komplemen. Penelitian ini mencakup karakterisasi graf terhubung dengan dimensi metrik lokal tertentu [3], perbandingan dimensi metrik dan dimensi metrik lokal pada graf produk berakar [7], pemanfaatan dimensi metrik lokal untuk aplikasi kimia matematika dan layanan pengiriman [8], penentuan nilai dimensi metrik lokal pada graf m -neighbourhood-corona [9], perhitungan dimensi metrik komplemen graf gabungan [10], analisis dimensi metrik komplemen pada graf pohon tertentu [11], pengembangan konsep dimensi metrik sisi komplemen [12]. Penelitian terbaru memperluas kajian dimensi metrik nonlokal [4], memperkenalkan dimensi metrik komplemen lokal [6], mempelajari dimensi metrik sisi nonlokal pada graf multiproduk corona [13], dan menghitung dimensi metrik nonlokal pada jaringan khusus seperti tangga heksagonal dan jaringan Sierpiński [14]. Penelitian ini secara umum memberikan pemahaman baru tentang dimensi metrik.

Pada tahun 1997, Klavžar dan Milutinović memperkenalkan graf Sierpinski $S(n, k)$, yang merupakan perluasan dari masalah menara Hanoi. Selain graf Sierpinski ini, terdapat juga Sierpinski Gasket S_n , yang bentuknya menyerupai segitiga Sierpinski. Himpunan titik dan sisi dari graf S_n adalah titik-titik sudut dan sisi-sisi dari segitiga yang membentuk segitiga Sierpinski. Sierpinski Gasket S_n ini juga memiliki kemiripan dengan segitiga Sierpinski dan diterapkan dalam berbagai aspek kehidupan sehari-hari, seperti pada desain musik dan antena [15].

Graf Hanoi H_n adalah graf yang merepresentasikan puzzle Menara Hanoi [16]. Graf Hanoi dibangun secara rekursif dengan himpunan titik yang merepresentasikan keadaan permainan. Graf ini juga dikenal sebagai salah satu kasus khusus dari Sierpinski gasket. Graf Hanoi dibangun dengan menggunakan himpunan titik yang terdiri dari koefisien binomial ganjil dari segitiga Pascal yang diambil dari baris ke-0 hingga baris ke- $(2^n - 1)$. Dua titik akan terhubung dengan sebuah sisi jika koefisien tersebut berdekatan secara horizontal atau diagonal [17].

Menurut kajian terkini dalam teori graf, konsep dimensi metrik telah berkembang mencakup dimensi metrik lokal [3], dimensi metrik nonlokal [4], dan dimensi metrik komplemen [5]. Namun, dimensi metrik komplemen nonlokal serta keterkaitan antara dimensi metrik lokal dan nonlokal dengan komplemennya belum dibahas secara eksplisit dalam literatur sebelumnya. Oleh karena itu, penelitian ini menawarkan perspektif baru dengan mengembangkan konsep dimensi metrik komplemen nonlokal sekaligus menganalisis keterkaitan antara dimensi metrik lokal dan nonlokal dengan komplemennya. Penelitian ini berfokus pada dimensi metrik komplemen lokal dan nonlokal serta menganalisis keterkaitan antara dimensi metrik lokal dan nonlokal dengan komplemennya.

Graf Sierpinski gasket dan graf Hanoi dikategorikan sebagai self-similar graph yang memungkinkan analisis pola konektivitas secara sistematis. Sierpinski Gasket sering digunakan dalam aplikasi seperti desain antena dan jaringan fraktal, sementara Graf Hanoi memiliki keterkaitan dengan puzzle Menara Hanoi dan segitiga Pascal, menjadikannya objek kajian yang berpotensi dikembangkan dalam konsep dimensi metrik komplemen lokal dan nonlokal. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi signifikan dalam pengembangan teori graf, khususnya dalam pemahaman mengenai hubungan antara dimensi metrik lokal dan nonlokal dengan komplemennya pada graf. Selain itu, hasil penelitian ini juga dapat membuka peluang untuk penerapan konsep dimensi metrik komplemen dalam berbagai bidang ilmu, seperti ilmu komputer, matematika terapan, dan rekayasa jaringan, terutama dalam model graf yang memiliki pola hierarkis. Berdasarkan uraian tersebut, penulis termotivasi untuk melakukan penelitian dengan judul Dimensi Metrik Komplemen Lokal dan Nonlokal pada Graf Sierpinski Gasket dan Graf Hanoi.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah penelitian ini meliputi:

1. Bagaimana penentuan nilai dimensi metrik komplemen lokal dan nonlokal pada graf Sierpinski gasket?
2. Bagaimana penentuan nilai dimensi metrik komplemen lokal dan nonlokal pada graf Hanoi?
3. Bagaimana keterkaitan antara dimensi metrik lokal dengan komplemennya ditinjau dari himpunan pembeda dan nilai dimensinya?
4. Bagaimana keterkaitan antara dimensi metrik nonlokal dengan komplemennya ditinjau dari himpunan pembeda dan nilai dimensinya?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya mengkaji graf Sierpinski Gasket dan graf Hanoi yang bersifat terhubung dan tak berbobot. Kajian dibatasi pada analisis dimensi metrik lokal, nonlokal, komplemen lokal, dan komplemen nonlokal beserta himpunan pembeda yang terkait. Metode penelitian berfokus pada pembuktian matematis dan analisis sifat rekursif graf yang didukung oleh perhitungan komputasional menggunakan Python, tanpa menggunakan metode numerik lanjutan maupun perangkat lunak alternatif. Batasan ini diterapkan agar interpretasi hasil tetap terarah serta mampu mencerminkan ruang lingkup dan keterbatasan pendekatan yang digunakan dalam penelitian.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menganalisis dimensi metrik komplemen lokal dan nonlokal pada graf Sierpinski gasket.
2. Menganalisis dimensi metrik komplemen lokal dan nonlokal pada graf Hanoi.
3. Menganalisis keterkaitan antara dimensi metrik lokal dan komplemen lokal ditinjau dari himpunan pembeda dan nilai dimensinya.
4. Menganalisis keterkaitan antara dimensi metrik nonlokal dan komplemen nonlokal ditinjau dari himpunan pembeda dan nilai dimensinya.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini meliputi kontribusi terhadap pengembangan pemahaman dalam teori graf, khususnya terkait dimensi metrik komplemen lokal nonlokal. Hasil penelitian ini diharapkan menjadi referensi bagi penelitian lanjutan dalam bidang tersebut, serta membuka peluang untuk penemuan baru dan pemahaman mengenai struktur graf yang lebih kompleks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Bab I Pendahuluan

Bab ini menguraikan latar belakang penelitian, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, serta sistematika penulisan tesis secara keseluruhan.

2. Bab II Tinjauan Pustaka dan Landasan Teori

Bab ini menyajikan kajian terhadap penelitian-penelitian terdahulu yang berkaitan dengan dimensi metrik dan variasinya, serta memuat definisi, teorema, sifat-sifat graf, dan konsep dasar yang menjadi landasan dalam analisis dimensi metrik lokal, nonlokal,

3. Bab III Hasil dan Pembahasan

Bab ini berisi konstruksi graf Sierpinski Gasket dan graf Hanoi, penentuan himpunan pembeda untuk setiap jenis dimensi metrik, analisis nilai dimensi metrik, serta pembahasan mengenai keterkaitan antarvariasi dimensi. Jika digunakan perhitungan atau verifikasi komputasi, hasilnya juga dipaparkan pada bab ini.

4. Bab IV Penutup

Bab ini memuat kesimpulan dari hasil penelitian mengenai perilaku keempat jenis dimensi metrik pada kedua graf, serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.