

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Di era digital yang semakin berkembang, berbagai bidang seperti pembelajaran mesin [1], pengelolaan sumber daya [2], serta portofolio keuangan[3] memerlukan pengambilan keputusan yang cepat dan efisien seiring kedatangan data secara real-time. Untuk mengatasi tantangan pemrosesan data yang dinamis ini, muncul sebuah kerangka yang dikenal sebagai Optimisasi Konveks Online atau *Online Convex Optimization* yang disingkat OCO. Disebut Online karena algoritma dalam kerangka kerja ini harus mampu mengambil keputusan secara *real-time* dan mengadaptasinya berdasarkan informasi yang diterima secara bertahap dari waktu ke waktu tanpa memiliki pengetahuan lengkap tentang semua data atau loss function di awal [4]. Selain itu, keputusan diambil secara berurutan dengan informasi parsial dan *loss function* yang berubah dari waktu ke waktu. Pendekatan ini berfokus pada minimisasi *regret* yaitu perbedaan antara performa algoritma dengan solusi optimal [4].

Pendekatan awal untuk optimisasi konveks online dipelopori oleh Zinkevich [5], yang memperkenalkan metode penurunan gradien online (*Online Gradient Descent*, OGD). Metode ini memungkinkan pembuat keputusan untuk memperbarui variabel keputusan secara *real-time* berdasarkan gradien fungsi objektif yang tersedia pada setiap langkah waktu [5]. Sejak itu, para peneliti berusaha untuk memperbaiki kinerja algoritma OCO dengan menambahkan berbagai asumsi tambahan. Sebagai contoh, ditemukan bahwa dengan adanya asumsi konveksitas kuat (*strong convexity*) pada fungsi objektif, batas *regret* algoritma dapat ditingkatkan secara signifikan, mencapai tingkat pertumbuhan logaritma [6]. Ini berarti *regret* algoritma tumbuh sangat lambat seiring waktu, mendekati performa optimal secara lebih efisien.

Algoritma *gradient descent* merupakan salah satu algoritma yang sering digunakan dalam OCO, tetapi pendekatan alternatif seperti penurunan koordinat (*Coordinate Descent*, CD) juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi konveks online. CD adalah teknik optimasi yang memperbarui satu

koordinat variabel keputusan secara bergantian pada setiap iterasi berdasarkan nilai gradiennya. Nesterov dalam [7] menunjukkan bahwa algoritma CD sangat efisien, khususnya dalam aplikasi *machine learning* di mana perhitungan gradien penuh seringkali mahal atau sulit dilakukan. Lebih lanjut, Wright dalam [8] menekankan bahwa CD ini memiliki potensi besar dalam mengatasi masalah optimisasi skala besar, karena pembaruan koordinat hanya dilakukan pada satu komponen variabel keputusan pada setiap iterasi, membuat perhitungan lebih sederhana dan efisien secara komputasi. Keunggulan ini mendorong penelitian ekstensif dalam pengembangan jaminan kinerja teoritis untuk berbagai algoritma CD dalam konteks OCO [8].

Algoritma *coordinate descent* dikenal sederhana dan efisien untuk berbagai masalah optimisasi, performa algoritma ini sering kali sangat bergantung pada dua faktor kunci yaitu strategi pemilihan koordinat yang diperbarui dan penentuan ukuran langkah (*step size*) yang tepat. Dalam konteks ini, *adaptive step size* menjadi sangat krusial. *Step size* yang adaptif memungkinkan algoritma untuk secara dinamis menyesuaikan laju pembaruan variabel keputusan berdasarkan informasi gradien yang diperoleh pada setiap iterasi, sehingga dapat secara signifikan meningkatkan kecepatan konvergensi dan akurasi solusi [9]. Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa penggunaan *step size* yang dinamis dapat mengurangi jumlah iterasi yang diperlukan untuk mencapai solusi optimal, terutama dalam konteks optimisasi yang melibatkan fungsi biaya yang kompleks [10]. Hal ini menjadi semakin relevan dalam aplikasi dunia nyata, terutama pada lingkungan optimisasi online di mana data terus-menerus berubah dan memerlukan respons algoritma yang cepat dan efisien.

Dalam literatur optimisasi, beberapa penelitian telah mengembangkan algoritma CD yang mengintegrasikan teknik-teknik baru untuk meningkatkan kinerjanya. Misalnya, Penelitian oleh Dmytro Perekrstento dkk dalam [11] mengusulkan metode pemilihan koordinat berbasis sampling berbobot untuk CD, namun pendekatan mereka belum mengintegrasikan strategi adaptif dalam penyesuaian (*step size*). Di sisi lain, Richtarik dan Fercok [10] mengembangkan algoritma *Parallel Coordinate Descent* untuk fungsi konveks *nonsmooth* maupun *smooth* dengan memperbarui koordinat secara bersamaan setiap iterasi, meskipun blok koordinat yang akan diperbarui dipilih secara acak. Lebih lanjut, Yankai dkk [4] membahas implementasi CD dalam

OCO dengan memberikan analisis mendalam untuk algoritma CD, tetapi masih menggunakan *step size* bernilai tetap untuk setiap iterasi. Kesenjangan ini menyoroti perlunya pengembangan algoritma CD dalam OCO yang memanfaatkan strategi *adaptive step size* untuk kinerja yang lebih optimal. Meskipun berbagai penelitian telah dilakukan dalam mengembangkan algoritma *coordinate descent* untuk *Online Convex Optimization*, masih terdapat kelemahan utama dalam pendekatan yang digunakan, salah satunya adalah pemilihan koordinat yang diperbarui seringkali tidak optimal, karena dilakukan secara acak atau siklis, yang berpotensi memperlambat konvergensi. Selain itu, *step size* sering kali tidak diatur secara adaptif berdasarkan perubahan gradien atau fungsi *loss*, yang dapat menyebabkan ketidakstabilan atau lambatnya konvergensi algoritma.

Hal ini lah yang memotivasi penulis untuk mengembangkan algoritma *coordinate descent* dengan pemilihan koordinat menggunakan aturan Gauss-Sothwell yaitu pemilihan koordinat berdasarkan gradien tertinggi, sehingga koordinat yang memiliki pengaruh paling besar terhadap perubahan fungsi objektif dapat diperbarui terlebih dahulu untuk mempercepat konvergensi algoritma. Selain itu, *step size* diperbarui secara adaptif pada setiap iterasi, bukan ditetapkan secara tetap atau diturunkan secara heuristik, sehingga algoritma lebih fleksibel dalam menyesuaikan kecepatan konvergensi sesuai dengan kondisi permasalahan yang dinamis.

Penelitian ini mengembangkan algoritma CD dalam [4] dengan mempertimbangkan nilai gradien dalam pemilihan koordinat dan mempertimbangkan *adaptive step size* dalam setiap iterasi untuk mempercepat konvergensi, yaitu algoritma *coordinate descent* dimodifikasi menjadi algoritma *Adaptive Step Size Coordinate Descent* (AS-CD) dengan memberikan bukti teorema konvergensi dan teorema *regret dynamic bound* yang dihasilkan oleh algoritma *Adaptive Step Size Coordinate Descent* dalam *Online Convex Optimization*, serta membandingkan kinerja algoritma *Adaptive Step Size Coordinate Descent* dengan algoritma *Fixed Step Size Coordinate Descent* (FS-CD).

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalahnya adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pengembangan algoritma *coordinate descent* menjadi algoritma

adaptive step size coordinate descent untuk menyelesaikan masalah optimisasi konveks online?

2. Bagaimana teorema konvergensi dan pembuktiannya untuk algoritma *adaptive step size coordinate descent*?
3. Bagaimana teorema *dynamic regret bound* dan pembuktiannya untuk algoritma *adaptive step size coordinate descent* dalam masalah optimisasi konveks online?
4. Bagaimana perbandingan kinerja solusi numerik antara algoritma *adaptive step size coordinate descent* dan *fixed step size coordinate descent*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian yang akan dilakukan adalah

1. Mengembangkan algoritma *adaptive step size coordinate Descent* untuk menyelesaikan masalah optimisasi konveks online.
2. Membuktikan teorema konvergensi untuk algoritma *adaptive step size coordinate descent*.
3. Membuktikan teorema *dynamic regret bound* untuk algoritma *adaptive step size coordinate descent* dalam masalah optimisasi konveks online.
4. Membandingkan kinerja hasil simulasi numerik algoritma *adaptive step size coordinate descent* dengan algoritma *fixed step size coordinate descent*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Pembaca, hasil penelitian ini dapat menjadi bahan referensi bagi pembaca, khususnya mahasiswa dan akademisi dalam memahami konsep optimisasi konveks online serta penerapan algoritma *coordinate descent* dengan *adaptive step size*. Pembahasan yang mencakup analisis konvergensi, *dynamic regret bound*, dan simulasi numerik diharapkan membantu pembaca memperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai perilaku algoritma optimisasi pada lingkungan dinamis.
2. Bagi peneliti selanjutnya, hasil penelitian ini dapat dijadikan acuan dan titik awal bagi peneliti selanjutnya untuk mengembangkan algoritma optimisasi berbasis koordinat yang lebih adaptif, baik dari sisi strategi pemilihan koordinat,

mekanisme pembaruan *step size*, maupun perluasan ke kelas fungsi dan kendala yang lebih umum. Kerangka analisis teoretis dan numerik yang disajikan juga dapat dimanfaatkan dalam studi lanjutan mengenai optimisasi konveks daring.

3. Bagi pengembangan ilmu matematika terapan, hasil penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan ilmu matematika terapan, khususnya pada bidang optimisasi dan pembelajaran daring, dengan mengintegrasikan analisis teoretis *dynamic regret* dan eksperimen numerik pada masalah berdimensi tinggi.