

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

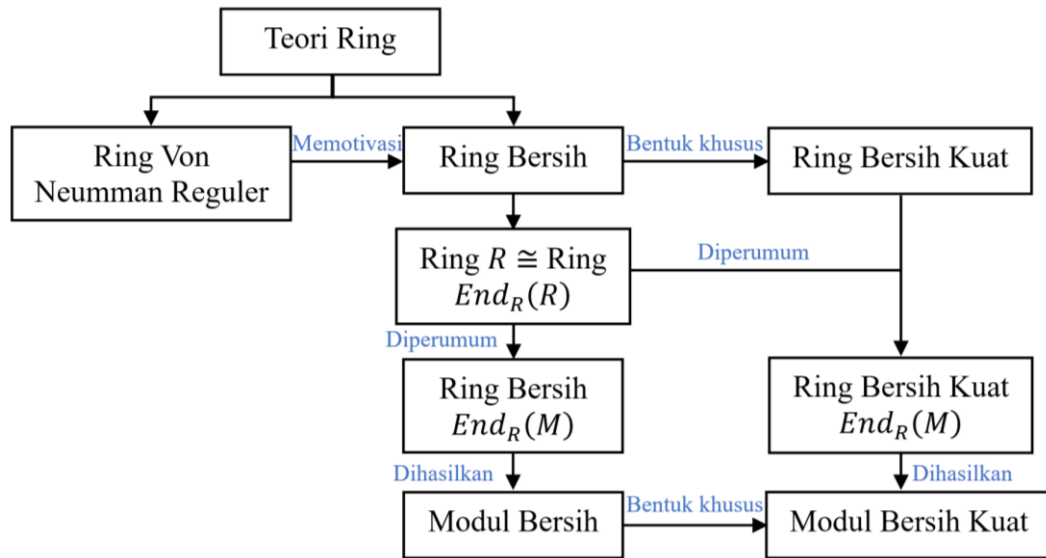
Sebuah grup abelian $(M, +)$ dan ring dengan elemen satuan $(R, +, \cdot)$ yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar antara grup M dan ring R dengan definisi $\alpha: R \times M \rightarrow M$ dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut dengan R -modul M [1]. Pada sebuah R -modul M terdapat sebuah hubungan antara dua buah modul yang dikenal dengan homomorfisma modul. Homomorfisma R -modul M ke R -modul M' adalah sebuah pemetaan yang mengawetkan hasil operasi-operasi pada R -modul M ke R -modul M' [2]. Jika suatu homomorfisma modul mengawetkan R -modul M ke dirinya sendiri, maka dapat disebut dengan endomorfisma modul. Himpunan semua endomorfisma-endomorfisma R -modul M dinotasikan dengan $End_R(M)$. Himpunan $End_R(M)$ terhadap operasi penjumlahan dan komposisi fungsi memenuhi aksioma pada ring, sehingga $(End_R(M), +, \circ)$ adalah ring [2].

Pada teori ring terdapat elemen-elemen khusus, yaitu elemen unit dan elemen idempoten [3]. Suatu elemen tak nol $a \in R$ disebut elemen unit, jika untuk sebarang $a \in R$ memiliki elemen invers terhadap perkalian, yaitu terdapat $a^{-1} \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot a^{-1} = 1_R$. Himpunan elemen-elemen unit di R dinotasikan dengan $U(R)$. Sementara itu, suatu elemen $e \in R$ disebut elemen idempoten, jika hasil perkalian antara elemen e dengan dirinya sendiri adalah dirinya sendiri, atau $e \cdot e = e^2 = e$. Himpunan elemen-elemen idempoten di R dinotasikan dengan $Id(R)$. Pada tahun 1976, John Von Neumann [4] pertama kali memperkenalkan Ring Von Neumann Reguler. Ring Von Neumann Reguler adalah ring R yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai hasil dari perkalian elemen unit dan elemen idempoten, yaitu untuk setiap $a \in R$ dapat dinyatakan sebagai $a = u \cdot e$, dimana $u \in U(R)$ dan $e \in Id(R)$ [4]. Pada tahun 1977, W. Keith Nicholson [5] memperkenalkan tentang Ring Bersih yang dimotivasi oleh Ring Von Neumann Reguler. Ring Bersih adalah ring R yang setiap elemennya dapat dipandang sebagai hasil dari penjumlahan antara elemen idempoten dan elemen unit, yaitu untuk setiap $a \in R$ dapat dinyatakan sebagai berikut, $a = u + e$, dimana $u \in U(R)$ dan $e \in Id(R)$ [5]. Penelitian lain mengenai ring bersih telah banyak

dilakukan, yaitu pada tahun 1994, Camillo & Yu [6] membuktikan bahwa *semiperfect ring* memenuhi aksioma ring bersih. Pada tahun 2001, Camillo & Khurana [7] menunjukkan bahwa ring unit reguler merupakan ring bersih. Selain itu, pada tahun 2013, Diesl [8] menunjukkan ring nilpoten merupakan ring bersih.

Diketahui bahwa untuk setiap R -modul M , himpunan $End_R(M)$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan komposisi fungsi. Di lain sisi, setiap ring R dapat dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri. Akibatnya, himpunan $End_R(R)$ juga merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan komposisi fungsi, dinotasikan dengan ring $(End_R(R), +, \circ)$. Lebih lanjut, terdapat sebuah homomorfisma ring yang menunjukkan bahwa ring R isomorfis dengan ring $End_R(R)$. Hal ini mengakibatkan ring R merupakan ring bersih jika dan hanya jika ring $End_R(R)$ merupakan ring bersih [9]. Dengan melakukan generalisasi konsep bersih yang ada pada teori ring diperoleh definisi tentang R -modul bersih. Pada tahun 2006, Victor Camillo, dkk [10] memperkenalkan struktur modul bersih. Modul bersih adalah modul yang ring endomorfismanya merupakan ring bersih [10]. Penelitian lanjutan mengenai modul bersih telah banyak dilakukan diantaranya, *nice module* [11] dan U -modul yang termasuk modul bersih [12]. Selain itu, pengembangan konsep bersih juga telah diperluas pada komodul bersih dan koaljabar bersih, sebagaimana yang telah dibahas dalam [13]–[15].

Dalam ring bersih terdapat pengembangan sifat baru yang disebut dengan ring bersih kuat. Ring bersih kuat adalah ring bersih yang setiap elemen unit dan elemen idempotennya bersifat komutatif terhadap operasi perkalian, atau untuk setiap $a = u + e$, berlaku $u \cdot e = e \cdot u$ [16]. Hal tersebut mendasari kajian mengenai modul bersih kuat, yaitu jika ring $End_R(M)$ merupakan ring bersih kuat, maka R -modul M merupakan modul bersih kuat [10]. Pada Gambar 1.1 berikut diberikan diagram *state of the art* terkait penelitian Tesis ini.



Gambar 1.1 Diagram *State of The Art*

Berdasarkan Gambar 1.1 menunjukkan bahwa kajian mengenai modul bersih kuat melatarbelakangi penulis dalam penulisan Tesis ini. Pada Tesis ini dibahas mengenai modul bersih kuat, teorema syarat perlu dan syarat cukup suatu modul bersih kuat, sifat bersih sekaligus bersih kuat pada reguler kuat, dan hubungan antara modul bersih kuat dengan struktur yang melatarbelakanginya.

1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan. Berikut diberikan rumusan masalah pada penelitian Tesis ini:

1. Bagaimana kajian tentang modul bersih kuat berupa definisi, sifat-sifat, dan contohnya?
2. Bagaimana penjelasan tentang pembuktian teorema syarat perlu dan syarat cukup suatu modul bersih kuat?
3. Bagaimana keterkaitan antara modul bersih kuat dan struktur yang melatarbelakanginya?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji tentang modul bersih kuat berupa definisi, sifat-sifat, dan contohnya.

2. Menjelaskan tentang pembuktian teorema syarat perlu dan syarat cukup suatu modul bersih kuat.
3. Mengetahui keterkaitan antara modul bersih kuat dan struktur yang melatarbelakanginya.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian Tesis ini bagi pembaca adalah dapat dijadikan sebagai sumber pemahaman tentang konsep modul bersih kuat, serta sebagai referensi untuk melakukan penelitian tentang konsep bersih pada struktur aljabar lainnya (semimodul bersih, aljabar bersih, koaljabar bersih, komodul bersih, dan lain-lain).