

BAB I

PENDAHULUAN

1. 1 Latar Belakang

Salah satu bahasan dalam struktur aljabar adalah ring. Ring adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu “+” dan “.” serta memenuhi aksioma-aksioma ring. Dalam suatu ring dapat ditemukan elemen khusus. Pada tahun 1936, Von Neumann mendefinisikan suatu elemen yang dinamakan elemen regular [1]. Diberikan ring $(R, +, \cdot)$. Elemen $r \in R$ disebut elemen regular jika terdapat $y \in R$ sedemikian hingga $r \cdot y \cdot r = r$ [2]. Selain elemen regular, elemen khusus lain yang dapat ditemukan pada suatu ring adalah elemen idempoten dan elemen unit. Elemen $e \in R$ disebut elemen idempoten jika $e \cdot e = e$. Elemen unit adalah elemen yang mempunyai invers terhadap operasi perkalian pada ring tersebut. Eksistensi elemen-elemen tersebut memotivasi adanya jenis-jenis ring khusus.

Ring bersih dikenalkan oleh W. K. Nicholson pada tahun 1977 [3]. Ring bersih adalah ring yang setiap elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan elemen unit dan idempoten. Lebih lanjut, pada tahun 2013, Ashrafi dan Nasibi memperkenalkan struktur ring yang merupakan generalisasi dari ring bersih yang dinamakan ring r -bersih. Ring r -bersih adalah ring yang setiap elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan elemen regular dan idempoten [4]. Kemudian pada tahun 2018, Sharma dan Singh memperkenalkan struktur ring yang dinamakan ring r -bersih kuat [5]. Ring r -bersih kuat ini merupakan bentuk khusus dari ring r -bersih. Ring r -bersih kuat adalah ring yang elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan elemen regular dan idempoten serta perkalian elemen regular dan idempoten tersebut memenuhi hukum komutatif.

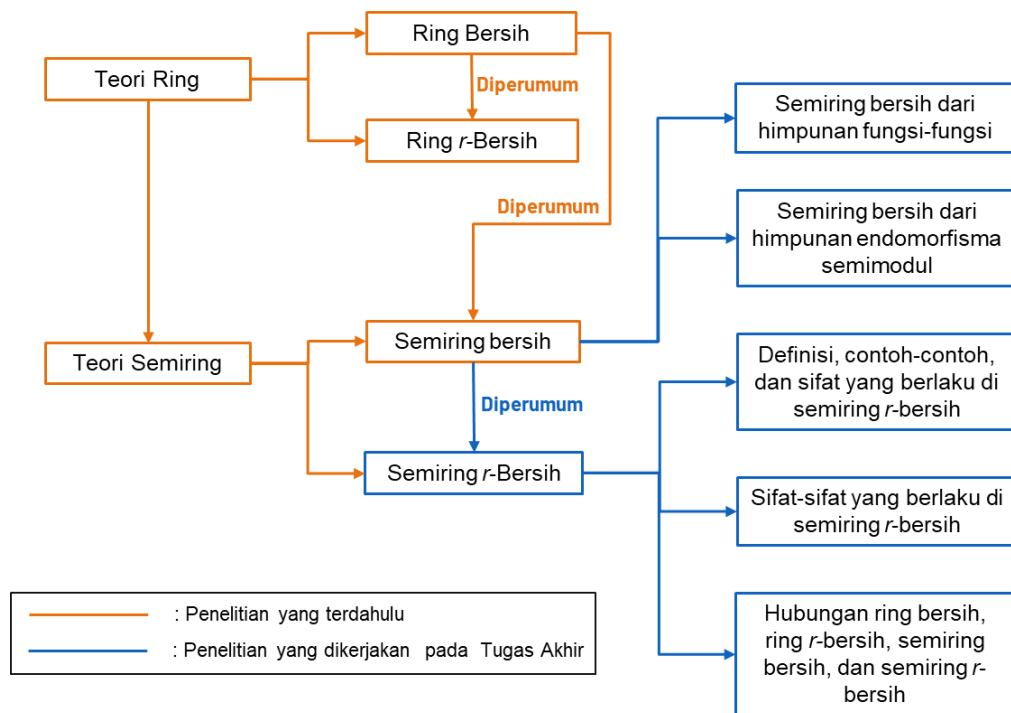
Dalam struktur aljabar juga dikenal suatu struktur yang dinamakan semiring. Semiring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu “+” dan “.” yang memenuhi aksioma-aksioma semiring. Semiring dapat

disebut sebagai ring tanpa pengurangan atau ring tanpa elemen invers terhadap operasi penjumlahan [6]. Hal tersebut dikarenakan terdapat aksioma ring yang tidak harus dipenuhi oleh semiring yaitu aksioma eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahan.

Tidak berbeda dengan struktur ring, dalam semiring juga dapat dijumpai elemen-elemen khusus seperti elemen regular, elemen idempoten, dan elemen unit dengan definisi yang sama. Pada tahun 2022, Kar dan Das memperkenalkan struktur yang menyerupai ring bersih yaitu semiring bersih. Semiring bersih adalah semiring yang setiap elemen tak nolnya dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan elemen unit dan elemen idempoten [7]. Semiring bersih ini merupakan bentuk perumuman dari ring bersih. Penelitian Kar dan Das [7] menjelaskan beberapa sifat yang berlaku di semiring bersih. Selain itu, pada penelitian tersebut juga menjelaskan hubungan semiring bersih dengan *exchange* semiring.

Lebih lanjut, suatu semiring dapat dibangun dari himpunan fungsi-fungsi dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan khusus agar memenuhi aksioma-aksioma semiring. Fakta ini memotivasi penulis meneliti semiring bersih dari suatu himpunan fungsi pada semiring dan juga himpunan endomorfisma semimodul.

Kajian mengenai ring bersih, ring r -bersih, ring r -bersih kuat, dan semiring bersih, serta eksistensi elemen regular dan elemen idempoten pada suatu semiring, juga memotivasi penelitian pada Tesis ini dengan bahasan semiring r -bersih. Penelitian semiring r -bersih diawali dengan mendefinisikan elemen r -bersih pada suatu semiring yang kemudian membentuk semiring yang dinamakan semiring r -bersih. Jadi, pokok bahasan pada Tesis ini adalah semiring bersih dari himpunan fungsi serta semiring r -bersih. Gambar 1.1 berikut menunjukkan *state of the art* dari penelitian yang dilakukan.



Gambar 1.1 *State of the art* dari penelitian Tesis

Beberapa penelitian telah membahas tentang sifat bersih atau elemen bersih pada struktur aljabar khususnya ring dan semiring. Pada tahun 2017, melalui [8] telah dibahas tentang elemen r -bersih pada ring grup. Yuwaningsih, dkk telah membahas tentang struktur ideal r -bersih dan sifat-sifatnya [9]. Sejauh pengetahuan penulis, belum ada penelitian yang membahas tentang semiring bersih dari suatu himpunan fungsi dan himpunan endomorfisma semimodul. Selain itu, belum terdapat juga penelitian tentang elemen r -bersih pada semiring ataupun membahas semiring r -bersih.

Pembahasan Tesis ini dimulai dengan membahas semiring bersih dari himpunan fungsi dan endomorfisma semimodul. Setelah bahasan semiring bersih, dilanjutkan bahasan tentang bahasan semiring r -bersih dimulai dengan mendefinisikan struktur baru yang belum ada pada penelitian-penelitian yang telah ada. Struktur baru tersebut adalah semiring r -bersih. Oleh karena belum ada penelitian yang membahas secara khusus tentang semiring r -bersih, maka dapat ditemui ide-ide baru yang mungkin muncul melalui penelitian ini. Pada penelitian yang telah

dilakukan, diperoleh hasil kajian tentang hubungan semiring r -bersih dengan struktur-struktur yang memotivasinya.

1. 2 Rumusan Masalah

Secara umum, rumusan masalah pada Tesis ini adalah membahas semiring bersih dari himpunan fungsi dan semiring r -bersih dengan sifat-sifatnya. Adapun rumusan masalahnya adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana struktur semiring bersih dari suatu himpunan fungsi atas semiring dan himpunan endomorfisma semimodul?
2. Bagaimana motivasi, definisi, dan bukti eksistensi dari semiring r -bersih?
3. Bagaimana hubungan antara semiring r -bersih dengan semiring bersih, ring bersih, dan ring r -bersih?
4. Bagaimana sifat-sifat dari semiring r -bersih?

1. 3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian Tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Memperoleh stuktur semiring bersih yang berasal dari suatu himpunan fungsi atas semiring dan himpunan endomorfisma semimodul
2. Memperoleh definisi dan bukti eksistensi suatu semiring r -bersih dengan memberikan contoh-contoh suatu semiring r -bersih.
3. Memperoleh hubungan antara semiring r -bersih dengan semiring bersih, ring bersih, ring r -bersih, dan ring r -bersih.
4. Memperoleh sifat-sifat semiring r -bersih yang dihasilkan dari pemahaman penulis dari sifat *cleanness* pada stuktur aljabar yang sudah ada.

1. 4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian bagi pembaca yaitu dapat dijadikan bahan dalam pemahaman dan pengetahuan struktur aljabar khususnya semiring. Adapun manfaat bagi keilmuan teori Aljabar adalah dapat digunakan sebagai referensi penelitian konsep bersih dan r -bersih pada struktur aljabar lainnya.

1. 5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada Tesis ini dibagi menjadi lima bagian. Pada bagian pertama yaitu Bab Pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan. Bagian kedua adalah Tinjauan Pustaka yang berisi tentang penelitian-penelitian terdahulu berkaitan dengan Tesis serta dasar teori yang digunakan dalam pembahasan Tesis. Bagian ketiga adalah Metode Penelitian. Pada bagian ketiga ini berisi tentang metode penelitian yang digunakan pada Tesis ini. Bagian keempat adalah pembahasan. Pada bagian ini dipaparkan hasil dari Tesis. Penulisan Tesis diakhiri dengan bab penutup yang memuat kesimpulan dari Tesis.