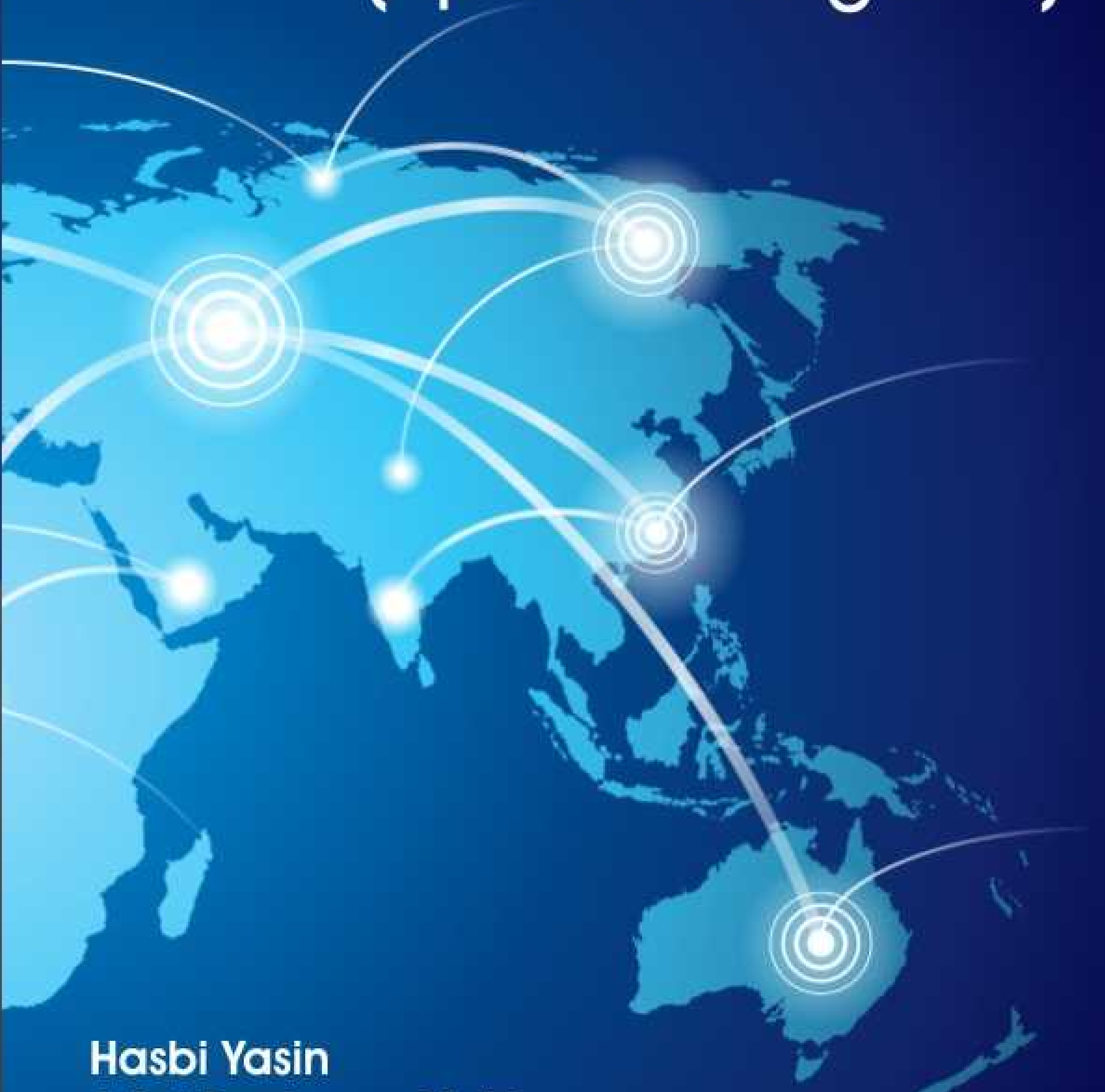
REGRESI SPASIAL

(Aplikasi dengan R)



Hasbi Yasin
Arief Rachman Hakim
Budi Warsito

REGRESI SPASIAL (Aplikasi dengan R)
Hasbi Yasin, Arief Rachman Hakim, Budi Warsito

REGRESI SPASIAL
(Aplikasi dengan R)

Hasbi Yasin
Budi Warsito
Arief Rachman Hakim

WADE GROUP
National Publishing

REGRESI SPASIAL
(Aplikasi dengan R)

REGRESI SPASIAL (Aplikasi dengan R)

Editor : Team WADE Publish
Layout : Team WADE Publish
Design Cover : Team WADE Publish
Sumber Gambar: https: //www. freepik. com/

Diterbitkan oleh:

WADE GROUP
National Publishing

Anggota IKAPI 182/JTI/2017

Cetakan Pertama, September 2020
ISBN: 978-623-7548-64-5

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)
Viii+120 hlm; 15,5x23 cm

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT kami panjatkan, berkat rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan buku ini. Tak lupa semoga shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Saw, kepada keluarganya, sahabatnya, para tabi'in, tabiut tabiahum, kepada kita semua, serta kepada seluruh umatnya hingga akhir zaman yang menjadikan sebagai uswatun hasanah, suri tauladan yang baik.

Buku ini secara spesifik akan mengulas metode statistika spasial khususnya metode regresi spasial. Seperti diketahui bahwa regresi spasial adalah metode regresi yang diaplikasikan pada data spasial. Buku ini secara khusus membahas teori tentang regresi spasial dengan pendekatan pembobotan area (persinggungan antar wilayah) meliputi model-model SCR, SAR, SDM, SEM, SDEM dan beberapa model regresi spasial robust untuk menangani adanya outlier. Untuk memperjelas langkah komputasi dan pengolahan datanya, penulis menggunakan Bahasa pemrograman R disertai dengan contoh sintaks dan outputnya. Pembaca bisa mempelajari secara rinci pada bab yang telah tersedia agar mudah digunakan pada analisis data spasial lainnya. Buku ini merupakan salah satu buku ajar untuk mata kuliah "Statistika Spasial".

Atas terselesaikannya buku ini, Penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tulus kepada mereka yang selalu memberikan support dan juga do'a:

1. Istriku tercinta, Ulfa Mazidah, dan anak-anakku tersayang: Ilmi, Fakhri dan Khaila yang selalu memberikan semangat dan kebahagiaan,
2. Segenap Pimpinan dan Staff Pengajar di Departemen Statistika Undip atas inspirasi, motivasi dan kerja samanya,
3. Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat (DRPM), Deputi Bidang Penguatan Riset dan Pengembangan Kementerian Riset

dan Teknologi/Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN) atas bantuan pendanaan melalui skema hibah Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi (PDUPT) dengan Nomor:225-92/UN7.6.1/PP/2020.

Masukan dan umpan balik dari pembaca sangat diharapkan untuk perbaikan isi buku ini. Semua korespondensi dapat dilakukan dengan email hasbiyasin@live.undip.ac.id. Semoga buku ini bermanfaat khususnya bagi perkembangan aplikasi statistika spasial dan para pembaca pada umumnya.

Pekalongan, 17 September 2020

Hasbi Yasin

DAFTAR ISI

BAB 1
REGRESI SPASIAL

1.1. Konsep Dasar Regresi Spasial

Regresi spasial adalah metode regresi yang digunakan untuk tipe data spasial atau data yang memiliki efek lokasi (*spatial effect*). Efek lokasi (*spatial effect*) terdiri dari dua jenis yaitu dependensi spasial dan heterogenitas spasial. Dependensi spasial dapat diartikan bahwa pengamatan pada lokasi i bergantung pada pengamatan lain di lokasi j, j≠i. Sedangkan heterogenitas spasial terjadi akibat adanya efek lokasi random, yaitu perbedaan antara satu lokasi dengan lokasi yang lainnya. Dasar berkembangnya metode regresi spasial adalah metode regresi linier klasik (regresi linier berganda). Pengembangan itu berdasarkan adanya pengaruh tempat atau spasial pada data yang dianalisis. Menurut Tobler pada tahun 1979 mengungkapkan di dalam Hukum Geografi pertama, bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang dekat lebih mempunyai pengaruh daripada sesuatu yang jauh (Anselin, 1988).

Menurut LeSage (1999) menjelaskan bahwa model umum regresi spasial dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{W}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}\left(0, \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\mathbf{I}_{n}\right)$$

dengan:

$\mathbf{y}$ = vektor variabel respon berukuran n x 1

ρ = koefisien parameter spasial lag dari variabel respon

$\mathbf{W}$ = matriks pembobot spasial yang berukuran n x n

$\mathbf{X}$ = matriks variabel prediktor berukuran n x (p+1)

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor koefisien parameter regresi berukuran (p+1) x 1

λ = koefisien parameter spasial *error*

u = vektor *error* yang mempunyai efek spasial dengan ukuran n x 1

ε = vektor *error* dengan ukuran n x 1

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Dalam Anselin (1988), dari persamaan model umum regresi spasial, persamaan (1.1) dapat dibentuk beberapa model lain sebagai berikut:

1. Jika $\rho=0$ dan $\lambda=0$ maka disebut model regresi linier klasik dengan persamaan yang terbentuk adalah:
$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.2}$$
2. Jika $\rho\neq0$ dan $\lambda=0$ disebut regresi *Spatial Autoregressive Model (SAR)* dengan persamaan yang terbentuk adalah:
$$\mathbf{y}=\rho\mathbf{W}\mathbf{y}+\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.3}$$
3. Jika $\rho=0$ dan $\lambda\neq0$ disebut regresi *Spatial Error Model* (SEM) dengan persamaan yang terbentuk adalah:
$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u} \tag{1.4}$$
$$\mathbf{u}=\lambda\mathbf{W}\mathbf{u}+\boldsymbol{\varepsilon}$$
4. Jika $\rho\neq0$ dan $\lambda\neq0$ disebut *Spatial Autoregressive Moving Average* (SARMA) dengan persamaan yang terbentuk adalah:
$$\mathbf{y}=\rho\mathbf{W}\mathbf{y}+\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u} \tag{1.5}$$
$$\mathbf{u}=\lambda\mathbf{W}\mathbf{u}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

1.2. Matriks Pembobot Spasial

Dalam analisis regresi, terkadang ditemukan adanya data yang memiliki efek spasial sehingga memerlukan penanganan menggunakan analisis spasial. Menurut Kosfeld dalam Wuryandari, *et al.* (2014), hal yang sangat penting dalam analisis spasial adalah matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial digunakan untuk menentukan bobot antar lokasi yang diamati berdasarkan hubungan ketetanggaan antar lokasi. Menurut Kosfeld dalam Wuryandari, *et al.* (2014), ketetanggaan dapat didefinisikan dalam beberapa cara, yaitu:

1. *Rook contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan dan sudut tidak diperhitungkan. Ilustrasi *rook contiguity* dapat dilihat pada Gambar 1, dalam hal ini unit B1, B2, B3, dan B4 merupakan tetangga dari unit A.

	Unit B2	
Unit B1	Unit A	Unit B3
	Unit B4	

Gambar 1.1. *Rook Contiguity*

2. *Bishop contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sudut-sudut yang saling bersinggungan dan sisi tidak diperhitungkan. Ilustrasi untuk *bishop contiguity* dapat dilihat pada Gambar 2, dalam hal ini unit C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A.

Unit C1		Unit C2
	Unit A	
Unit C4		Unit C3

Gambar 1.2. *Bishop Contiguity*

3. *Queen contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan dan sudut juga diperhitungkan. Ilustrasi untuk *queen contiguity* dapat dilihat pada Gambar 3, dalam hal ini unit B1, B2, B3 dan B4 serta C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A.

Unit C1	Unit B2	Unit C2
Unit B1	Unit A	Unit B3
Unit C4	Unit B4	Unit C3

Gambar 1.3. *Queen Contiguity*

Menurut Kosfeld dalam Wuryandari, *et al.* (2014), matriks pembobot spasial ***W*** dapat diperoleh dari dua cara yaitu matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* ***W***) dan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix* ***W****). Matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix,* ***W***) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot yang sama rata terhadap tetangga lokasi terdekat dan yang lainnya nol, sedangkan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix,* ***W****) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot satu bagi tetangga terdekat dan yang lainnya nol.

1.3. Uji Dependensi Spasial

Salah satu cara untuk mengetahui adanya dependensi spasial antar lokasi adalah dengan melakukan uji autokorelasi spasial dengan menggunakan statistik *Moran's I*. Autokorelasi spasial adalah taksiran dari korelasi antar nilai amatan yang berkaitan dengan lokasi pada variabel yang sama. Jika terdapat pola sistematik dalam penyebaran sebuah variabel, maka terdapat autokorelasi spasial. Menurut Goodchild (1986), untuk mengetahui apakah ada autokorelasi spasial antar lokasi dapat dilakukan uji autokorelasi spasial dengan menggunakan *Moran's I*.

Hipotesis:
H_0: Tidak ada autokorelasi spasial antar lokasi
H_1: Ada autokorelasi spasial antar lokasi

Statistik Uji: $Z_{hitung} = \dfrac{I - E(I)}{\sqrt{Var(I)}}$

dengan:

$$I = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} c_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$E(I) = I_0 = -\frac{1}{n-1}$$

$$Var(I) = \frac{n^2 S_1 - nS_2 + 3S_0^2}{(n^2-1)S_0^2} - [E(I)]^2$$

$$c_{ij} = (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \; ; \; S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{n}(w_{ij} + w_{ji})^2 \; ;$$

$$S_2 = \sum_{i\neq j}^{n}(w_{i0} + w_{0i})^2 \; ; \; w_{i0} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \; ; \; w_{0i} = \sum_{j=1}^{n} w_{ji}$$

x_i = Data ke - *i* (*i* = 1,2,....,*n*)

x_j = Data ke - *j* (*j* = 1,2,...,*n*)

w_{ij} = Bobot wilayah i , j

$\bar{x}$ = Rata-rata data

$Var(I)$ = Varian *Moran's I*

$E(I)$ = *Expected value Moran's I*

Keputusan: H_0 ditolak jika $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$

1.4. Aplikasi Uji Dependensi Spasial dengan R

Pada sub Bab ini akan diberikan contoh pembentukan matriks pembobot spasial yang berbasis area (persinggungan). Kemudian, dengan matriks pembobot tersebut akan dilakukan uji dependensi spasial pada beberapa variabel penelitian. Misalkan, sebuah penelitian dilakukan dengan menggunakan data sekunder yang diperoleh dari katalog Provinsi Jawa Tengah Dalam Angka 2018 yang dikeluarkan oleh Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Jawa Tengah dan buku Profil Kesehatan Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017 yang dikeluarkan oleh Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah. Unit observasi dalam penelitian ini adalah 35 kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah.

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah variabel yang terdiri dari 1 variabel respon (Y) dan 5 variabel prediktor (X). Rincian variabel data yang digunakan dijelaskan sebagai berikut (data terlampir pada **Lampiran 1**):

AHH : Angka Harapan Hidup (Tahun)
RLS : Rata-rata lama sekolah (Tahun)
PHBSP : Persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat
PA : Jumlah Posyandu (Unit)
MSKN : Persentase penduduk miskin
PGLRN : Pengeluaran per kapita disesuaikan (Juta Rupiah)

Contoh 1.1:

Visualisasi Peta dengan R. Membuat layout peta dengan R dapat dilakukan dengan bantuan paket R antara lain: *tmap, raster,* dan *ggplot2.* Berikut adalah contoh visualisasi peta Jawa Tengah (jateng.shp) dengan menggunakan R.

Sintaks:

```
library(tmap)
library(raster)
#Input Shp File
spJateng = shapefile("jateng.shp")
```

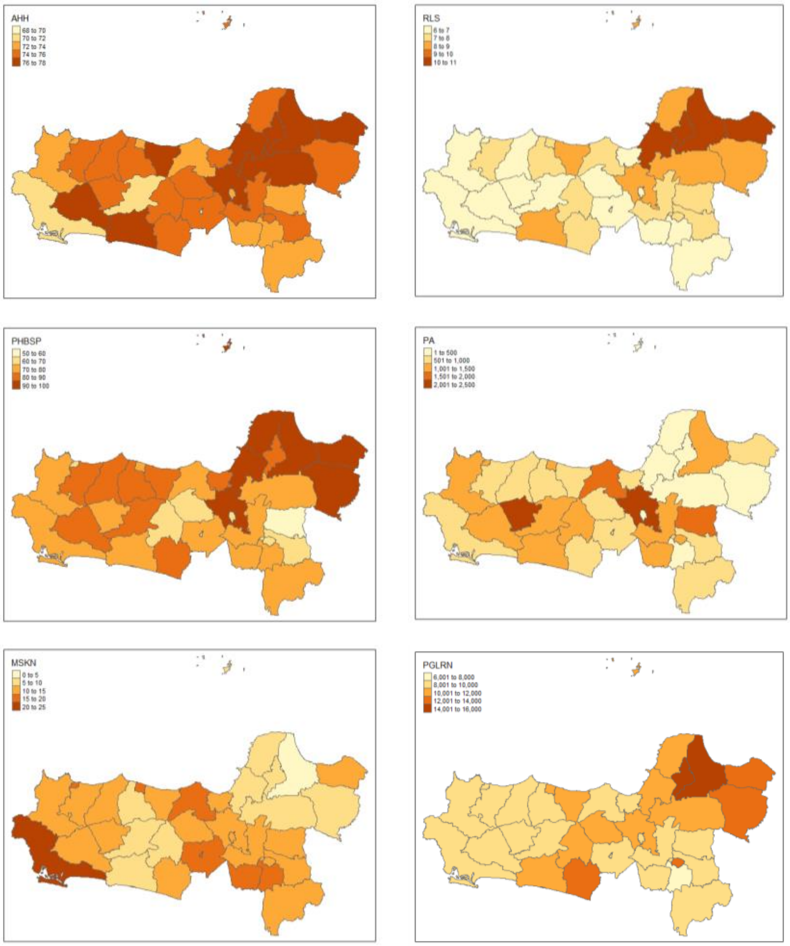
```
names(spJateng)
#Menampilkan Peta Jawa Tengah
tm_shape(spJateng) + tm_polygons()

#Import data dari file *.csv
data=read.csv("Data AHH Central Java.csv", header=T, sep=",")
head(data,5)

#Menambahkan kolom variabel dalam file shp
spJateng$AHH=data$AHH
spJateng$RLS=data$RLS
spJateng$PHBSP=data$PHBSP
spJateng$PA=data$PA
spJateng$MSKN=data$MSKN
spJateng$PGLRN=data$PGLRN

#Menampilkan Layout Peta Tiap Variabel
projection(spJateng) <- CRS("+init=epsg:3395")
win.graph()
tm_shape(spJateng) + tm_polygons(col="AHH")
win.graph()
tm_shape(spJateng) + tm_polygons(col="RLS")
win.graph()
tm_shape(spJateng) + tm_polygons(col="PHBSP")
win.graph()
tm_shape(spJateng) + tm_polygons(col="PA")
win.graph()
tm_shape(spJateng) + tm_polygons(col="MSKN")
win.graph()
tm_shape(spJateng) + tm_polygons("PGLRN")
```

Output:
Berikut adalah layout peta berdasarkan variabel penelitian



Gambar 2.1. Layout Peta Berdasarkan Variabel

Contoh 1.2:

Membuat matriks Pembobot. Matriks pembobot dapat dibuat melalui tiga cara:

a. Melalui peta dalam file berekstensi *.shp

   Berikut adalah contoh matriks pembobot yang disusun dari peta Jawa Tengah

   Sintaks:

```
library(spdep)
library(spatialreg)
library(rgdal)
#MATRIKS PEMBOBOT
queen.nb=poly2nb(spJateng) #Pembobot queen
queen.listw=nb2listw(queen.nb) #convert nb to listw type
queen.jateng= queen.listw

rook.nb=poly2nb(spJateng,queen=FALSE) #Pembobot rook
rook.listw=nb2listw(rook.nb) #convert nb to listw type
rook.jateng= rook.listw

#Menyimpan Matriks Pembobot
bobot.queen = listw2mat(queen.listw) #convert listw to matrix
write.csv(bobot, "Matriks Bobot Queen.csv")
bobot.rook = listw2mat(rook.listw) #convert listw to matrix
write.csv(bobot, "Matriks Bobot Rook.csv")
```

Output:

```
> queen.nb=poly2nb(spJateng) #Pembobot queen
> queen.nb
Neighbour list object:
Number of regions: 35
Number of nonzero links: 148
Percentage nonzero weights: 12.08163
Average number of links: 4.228571

> queen.listw=nb2listw(queen.nb)
> queen.jateng= queen.listw
> queen.jateng
Characteristics of weights list object:
Neighbour list object:
Number of regions: 35
Number of nonzero links: 148
Percentage nonzero weights: 12.08163
Average number of links: 4.228571

Weights style: W
Weights constants summary:
   n   nn S0       S1       S2
W 35 1225 35 18.72986 150.9135
```

Output tersebut contoh pembobotan menggunakan metode *queen,* terlihat bahwa banyaknya lokasi ada 35 yang menunjukkan banyaknya Kabupaten/Kota di Jawa Tengah. Banyaknya Nonzero link menunjukkan elemen matriks pembobot yang tidak nol (persinggungan antar Kabupaten/Kota). Untuk menyimpan matriks pembobot, bobot harus diubah dalam format matriks, kemudian disimpan dalam file *.csv.

b. Import dari file berekstensi *.gal (dari Geoda)

```
#Import file *.gal dari Geoda
queen.nb=read.gal('queen_jateng.gal')
queen.jateng=nb2listw(queen.nb)
rook.nb=read.gal('rook_jateng.gal')
rook.jateng=nb2listw(rook.nb)
```

c. Import manual dari Ms. Excel / file *.csv

Cara ini digunakan ketika tidak tersedia file peta *.shp sehingga kita dapat membentuk matriks pembobot secara manual dalam Ms. Excel yang kemudian kita simpan dalam format file *.csv. Cara ini juga memungkinkan kita untuk membuat matriks pembobot menggunakan metode customized, tidak bergantung dari metode yang sudah sudah ada. Jika kita memiliki file bobotqueen.csv, untuk membentuk matriks pembobot dalam tipe *listw/nb* (tipe file untuk uji Moran's) dapat digunakan sintaks berikut:

```
## INPUT PEMBOBOT QUEEN CONTIGUITY ##
#Import dari file bobotqueen.csv
W=read.csv("bobotqueen.csv",sep=",",dec=".",header=T)
row.names(W)=1:35
colnames(W)=1:35
W.m<-as.matrix(W)
View(W.m)
```

```
W.lw=mat2listw(W.m,style="W")
class(W.lw)
```

Output:

```
> class(W.lw)
[1] "listw" "nb"
> W.lw
Characteristics of weights list object:
Neighbour list object:
Number of regions: 35
Number of nonzero links: 148
Percentage nonzero weights: 12.08163
Average number of links: 4.228571

Weights style: W
Weights constants summary:
   n   nn S0       S1       S2
W 35 1225 35 18.64242 151.0178
```

Contoh 1.3:

Uji Dependensi Spasial dengan Moran's I. Uji Moran's I menggunakan R dapat dilakukan dengan sintaks berikut:

```
#Moran Test: Pembobot Queen
moran.test(spJateng$AHH,queen.jateng,randomisation=FALSE)
moran.plot(spJateng$AHH,queen.jateng)
moran.test(spJateng$RLS,queen.jateng,randomisation=FALSE)
moran.plot(spJateng$RLS,queen.jateng)
moran.test(spJateng$PHBSP,queen.jateng,randomisation=FALSE)
moran.plot(spJateng$PHBSP,queen.jateng)
moran.test(spJateng$PA,queen.jateng,randomisation=FALSE)
moran.plot(spJateng$PA,queen.jateng)
moran.test(spJateng$MSKN,queen.jateng,randomisation=FALSE)
moran.plot(spJateng$MSKN,queen.jateng)
moran.test(spJateng$PGLRN,queen.jateng,randomisation=FALSE)
moran.plot(spJateng$PGLRN,queen.jateng)
```

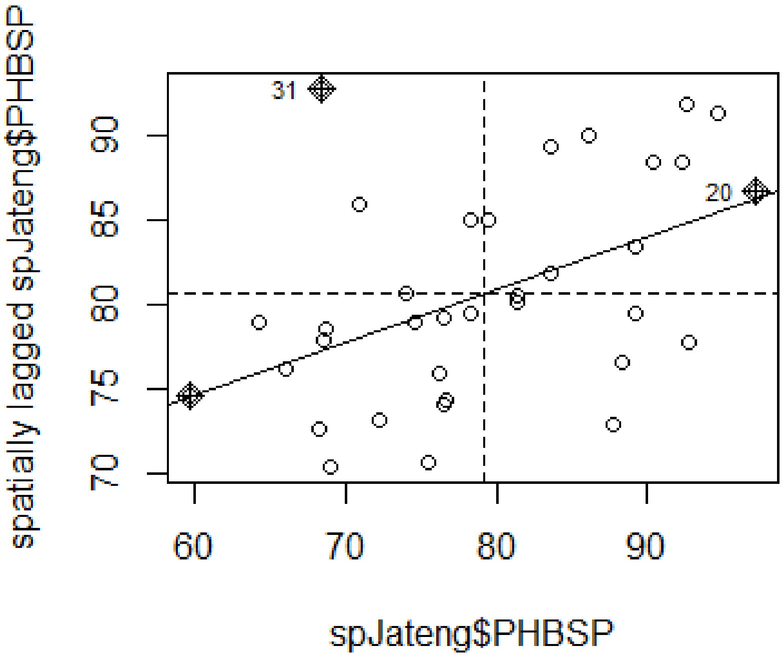
Contoh output untuk variabel PHBSP adalah sebagai berikut:

```
> moran.test(spJateng$PHBSP,queen.jateng, randomisation=FA
LSE)
```

```
        Moran I test under normality

data:  spJateng$PHBSP
weights: queen.jateng

Moran I statistic standard deviate = 2.9544, p-value = 0.0
01566
alternative hypothesis: greater
sample estimates:
Moran I statistic       Expectation          Variance
       0.31214724       -0.02941176        0.01336538
```



Gambar 2.2. Moran Scatter Plot Variabel PHBSP

H_0 ditolak jika nilai $\left|Z_{hitung}\right| > Z_{\alpha/2}$. Dari output dapat dilihat bahwa nilai |Z-hitung| dari variabel PHBSP < $Z_{(\alpha/2)}$ = 1,96 , yang berarti H_0 ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat autokorelasi spasial antar lokasi baik pada variabel tersebut. Untuk variabel lainnya, silakan dicoba sintaks tersebut.

BAB 2
SPATIAL CROSS REGRESSIVE

2.1. Konsep Dasar Model SCR

Spatial Cross Regressive (SCR) merupakan model regresi spasial, dimana efek spasial melekat pada variabel independen (**X**). Menurut LeSage & Pace (2009) dalam hal pemodelan, variabel independen yang dipengaruhi oleh lag spasial (**WX**) dapat berperan langsung dalam menentukan nilai dari variabel dependen (**y**) seperti pada persamaan berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}^{*}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \beta_p\mathbf{x}_p + \gamma_1\mathbf{W}\mathbf{x}_1 + \gamma_2\mathbf{W}\mathbf{x}_2 + \cdots + \gamma_p\mathbf{W}\mathbf{x}_p + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{*} = \begin{bmatrix} Lx_{11} & Lx_{12} & \cdots & Lx_{1p} \\ Lx_{21} & Lx_{22} & \cdots & Lx_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Lx_{n1} & Lx_{n2} & \cdots & Lx_{np} \end{bmatrix}$$

Dengan $\mathbf{X}^{*}$ merupakan variabel baru yang diperoleh dari perkalian $\mathbf{X}$ X dengan matriks pembobot area ($\mathbf{W}$).

Estimasi Parameter *Spatial Cross Regressive*

Misalkan: $\mathbf{X}_{gab} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}^{*} \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$, maka persamaan model SCR dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_{gab}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) seperti pada regresi berganda maka akan diperoleh nilai estimasi parameter model SCR adalah sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{X}_{gab}^{T}\mathbf{X}_{gab}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}_{gab}^{T}\mathbf{y}$$

- Uji Kecocokan Model SCR (Perbandingan Model Regresi OLS)

  Hipotesis :

  $H_0 : \gamma_i = 0, \forall_i$ (Model OLS lebih baik)

  $H_1 : \exists_i \gamma_i \neq 0$ (Model SCR lebih baik)

  Statistik Uji :

  $$F_{hitung} = \frac{\left(SSE_C - SSE_U\right)/\left(2p - p\right)}{SSE_U /(n - 2p - 1)} \sim F_{\alpha/2;\ p\ ;\ (n-2p-1)}$$

  SSE_C = SSE dari model constrained/ dengan anggapan H_0 benar (model OLS)

  SSE_U = SSE dari model unconstrained/ dengan anggapan H_0 salah (model SCR)

- Uji Kecocokan Model Keseluruhan

  Hipotesis :

  $H_0 : \theta_i = 0, \forall_i$ (Model SCR tidak cocok)

  $H_1 : \exists_i \theta_i \neq 0$ (Model SCR cocok)

  Statistik Uji :

  $$F_{hitung} = \frac{\left(SSE_C - SSE_U\right)/2p}{SSE_U /(n - 2p - 1)}$$

  SSE_C = SSE dari model constrained/ dengan anggapan H_0 benar (model tanpa prediktor)

  SSE_U = SSE dari model unconstrained/ dengan anggapan H_0 salah (model SCR)

Prosedur Pemodelan SCR

1. Inputkan data pengamatan

2. Tentukan matriks pembobot **W** berdasarkan pembobotan persinggungan (area)
3. Hitung variabel prediktor baru (**X*** = **WX**)
4. Bentuk matriks variabel prediktor gabungan,

   $$\mathbf{X}_{gab} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}^{*} \end{bmatrix}$$

5. Lakukan analisis seperti pada model Regresi Berganda OLS

2.2. Aplikasi SCR dengan R

Contoh 2.1:

Perhatikan data pada contoh Bab 1. Berdasarkan data tersebut, akan dibuat model regresi spasial dengan menggunakan metode SCR. Model SCR juga akan dibandingkan dengan model regresi berganda. Sintaks yang digunakan adalah sebagai berikut:

Sintaks:

```
#PERSAMAAN REGRESI
reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN
#OLS
reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
summary(reg.OLS)
#SLX (SCR)
reg.SLX=lmSLX(reg.eq,data=spJateng, queen.jateng)
summary(reg.SLX)
#Perhitungan AIC
AIC(reg.SLX)
AIC(reg.OLS)
#Perbandingan Model dengan OLS
LR.sarlm(reg.SLX,reg.OLS) # OLS vs SCR
```

Output:

```
> #PERSAMAAN REGRESI
> reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN
> #OLS
> reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
> summary(reg.OLS)
```

```
Call:
lm(formula = reg.eq, data = spJateng)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.5502 -0.5978  0.2119  0.8688  1.7548 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  6.970e+01  3.141e+00  22.193   <2e-16 ***
RLS          7.170e-01  3.969e-01   1.807   0.0812 .  
PHBSP        2.548e-02  3.019e-02   0.844   0.4056    
PA           6.285e-04  4.993e-04   1.259   0.2182    
MSKN        -1.805e-01  7.829e-02  -2.306   0.0285 *  
PGLRN       -8.195e-05  2.523e-04  -0.325   0.7476    
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘
’ 1

Residual standard error: 1.397 on 29 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5625,      Adjusted R-squared:  0.4
871 
F-statistic: 7.457 on 5 and 29 DF,  p-value: 0.000133

> #SLX (SCR)
> reg.SLX=lmSLX(reg.eq,data=spJateng, queen.jateng)
> summary(reg.SLX)

Call:
lm(formula = formula(paste("y ~ ", paste(colnames(x)[-1], 
collapse = "+"))), 
    data = as.data.frame(x), weights = weights)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.5752 -0.4155  0.0421  0.7165  1.8262 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 69.9357207  6.8832531  10.160  3.6e-10 ***
RLS          1.1179950  0.4071408   2.746  0.01125 *  
PHBSP        0.0461053  0.0287603   1.603  0.12200    
PA           0.0006146  0.0005269   1.166  0.25490    
MSKN        -0.1708288  0.0730280  -2.339  0.02798 *  
PGLRN        0.0001625  0.0002365   0.687  0.49874    
lag.RLS     -0.2159117  0.8120555  -0.266  0.79260    
lag.PHBSP   -0.0874988  0.0593118  -1.475  0.15315    
lag.PA       0.0027233  0.0009307   2.926  0.00739 ** 
lag.MSKN    -0.0241545  0.1562847  -0.155  0.87847    
```

```
lag.PGLRN   -0.0001170  0.0005603  -0.209  0.83632
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘
’ 1

Residual standard error: 1.209 on 24 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.729,      Adjusted R-squared:  0.6
161
F-statistic: 6.457 on 10 and 24 DF,  p-value: 9.054e-05

> #Perhitungan AIC
> AIC(reg.SLX)
[1] 123.4009
> AIC(reg.OLS)
[1] 130.1694
> #Perbandingan Model dengan OLS
> LR.sarlm(reg.SLX,reg.OLS) # OLS vs SCR

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 16.768, df = 5, p-value = 0.00496
sample estimates:
Log likelihood of reg.SLX Log likelihood of reg.OLS
                -49.70045                 -58.08469
```

Berdasarkan output tersebut, maka model SCR dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\widehat{AHH}_i = & 69{,}9357 + 1{,}1179RLS_i + 0{,}0461PHBSP_i + 0{,}0006PA_i \\ & - 0{,}1708MSKN_i + 0{,}0001PGLRN_i \\ & - 0{,}2159\sum_{j=1}^{n} w_{ij}RLS_j - 0{,}0875\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PHBSP_j \\ & + 0{,}0027\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PA_j - 0{,}0241\sum_{j=1}^{n} w_{ij}MSKN_j \\ & - 0{,}0001\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PGLRN_j\end{aligned}$$

Nilai R-Square model SCR (72,9%) lebih tinggi bila dibandingkan dengan nilai R-Square dari regresi berganda (56,25%). Begitu juga dengan nilai AIC dari model SCR (123,4009) yang lebih kecil dari model OLS (130,1694). Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa model SCR lebih baik/lebih sesuai untuk menggambarkan model Angka Harapan Hidup di Jawa Tengah. Hal ini juga didukung oleh nilai statistik Likelihood Ratio Test yang menunjukkan angka 16,768 dengan sig. 0,00696, yang menunjukkan bahwa ada perbedaan yang sangat nyata antara model SCR dengan model OLS.

Contoh 2.2:

Perhatikan data pada Contoh 2.1, tidak semua variabel prediktor signifikan terhadap model. Untuk memperbaikinya, salah satu caranya adalah dengan mengeluarkan beberapa variabel yang paling tidak signifikan (signifikansinya lemah) dari model tersebut.

Sintaks:

```
#Perbaikan Model SCR
#Mengambil Matriks Variabel Prediktor dari model OLS
X=model.matrix(reg.OLS)
#Membentuk matriks lag spasial
lagX = create_WX(X,queen.jateng,prefix = "lag")
spJateng2=cbind(spJateng,lagX)
#Membuat model SCR secara manual
reg.SLX2=lm(AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN+lag.PHBSP
+lag.PA,data=spJateng2)
summary(reg.SLX2)
AIC(reg.SLX2)
```

Output:

```
> summary(reg.SLX2)

Call:
lm(formula = AHH ~ RLS + PHBSP + PA + MSKN + PGLRN + lag.P
HBSP +
    lag.PA, data = spJateng2)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.6210 -0.5257  0.1279  0.6949  1.8507
```

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 68.8301552  4.1318685  16.658 9.91e-16 ***
RLS          1.1018114  0.3413577   3.228  0.00326 ** 
PHBSP        0.0475762  0.0260549   1.826  0.07893 .  
PA           0.0007818  0.0004433   1.763  0.08915 .  
MSKN        -0.1712920  0.0670176  -2.556  0.01653 *  
PGLRN        0.0001360  0.0002198   0.619  0.54117    
lag.PHBSP   -0.1139391  0.0424243  -2.686  0.01223 *  
lag.PA       0.0029159  0.0008098   3.601  0.00126 ** 
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘
’ 1

Residual standard error: 1.152 on 27 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7232,	Adjusted R-squared:  0.6
514 
F-statistic: 10.08 on 7 and 27 DF,  p-value: 3.82e-06

> AIC(reg.SLX2)
[1] 118.1484
```

Dengan mengeluarkan beberapa variabel diperoleh nilai AIC yang lebih kecil dari model SCR sebelumnya. Sebagai latihan dapat dicoba untuk perbaikan dengan mengeluarkan variabel prediktor lainnya yang tidak signifikan.

BAB 3
SPATIAL AUTOREGRESSIVE

3.1. Konsep Dasar Model SAR

Spatial Autoregressive Model (SAR) disebut juga *Spatial Lag Model (SLM)* adalah salah satu model spasial dengan pendekatan area dengan memperhitungkan pengaruh spasial lag pada variabel dependen saja. Model ini dinamakan juga *Mixed Regressive-Autoregressive* karena mengkombinasikan model regresi biasa dengan model regresi spasial lag pada variabel dependen (Anselin, 1988). Secara matematis model SAR dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}\left(0, \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\mathbf{I}_{n}\right)$$

Persamaan tersebut menjelaskan variasi dalam y sebagai kombinasi linear dari unit yang berdekatan tanpa variabel independen. Penaksiran parameter pada model *autoregressive spatial* menggunakan metode penaksiran *maximum likelihood* dimana parameter-parameter yang belum diketahui diperoleh dengan memaksimumkan suatu fungsi kemungkinan *(likelihood function).* Estimasi parameter model SAR dengan metode OLS menghasilkan parameter yang bersifat bias dan tidak konsisten.

Metode Estimasi Parameter Model SAR

<u>Maximum Likelihood (ML) untuk Regresi OLS</u>

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

Asumsi $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$

Sehingga fungsi densitas u_i

$$f\left(u_i,0,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{u_i{}^2}{\sigma^2}\right)$$

$$L_{\mathbf{u}}=\prod_{i=1}^{n} f\left(u_i,0,\sigma^2\right)$$ → densitas bersama

$$=\frac{1}{2\pi^{n/2}\sigma^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}u_i{}^2\right)$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{u}^T\mathbf{u}\right)$$

Distribusi bersama dari y adalah :

$$f_{y1,\cdots,yn}(\mathbf{y})=f_{u1,\cdots,un}(\mathbf{u})\left|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}}\right|$$

$$\rightarrow \mathbf{y}=\mathbf{X\beta}+\mathbf{u}$$

$$\rightarrow \mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}$$

$$\left|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}}\right|=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=1$$

sehingga

$$f_{y1,\cdots,yn}(\mathbf{y})=L_{\mathbf{y}}=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right)^T\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right)\right)$$

$$\ln L_{\mathbf{y}}=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right)^T(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})$$

$$\frac{\partial\ln L_{\mathbf{y}}}{\partial\beta}=\cdots \quad \rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}}=\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

$$\frac{\partial\ln L_{\mathbf{y}}}{\partial\sigma^2}=\cdots \quad \rightarrow \sigma^2=\frac{1}{n}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right)^T\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right) \quad \text{(Bias)}$$

$$\rightarrow \sigma^2=\frac{1}{n-\left(p+1\right)}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right)^T\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right)$$

dengan, p= banyaknya variabel independen

<u>Estimasi parameter Model SAR dengan MLE</u>

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \rho\mathbf{Wy} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{y} - \rho\mathbf{Wy} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\left(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}\right)\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W}\right)\mathbf{y} - \mathbf{X\beta} \quad \rightarrow \left|\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{y}}\right| = \left|\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}\right|$$

Metode MLE

$$L_\varepsilon = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon}\right)$$

$$L_y = L_\varepsilon . \left|\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{y}}\right|$$

$$L_y = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}}\left|\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}\right|\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon}\right)$$

Langkah-langkah Estimasi Parameter Model SAR

1. Regresikan $\mathbf{y}$ terhadap $\mathbf{X}$

   OLS: $\hat{\boldsymbol{\beta}}_O = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$

   Residual : $\hat{\mathbf{e}}_O = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_O$

2. Regresikan $\mathbf{Wy}$ hanya terhadap $\mathbf{X}$

   OLS: $\hat{\boldsymbol{\beta}}_L = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Wy}$

   Residual: $\hat{\mathbf{e}}_L = \mathbf{Wy} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_L$

3. Mencari parameter ρ dengan memaksimalkan fungsi likelihood

$$Max \ln L_C(\rho) = C - \frac{n}{2}\ln\left[\frac{1}{n}\left(\hat{\mathbf{e}}_O - \rho\hat{\mathbf{e}}_L\right)^T\left(\hat{\mathbf{e}}_O - \rho\hat{\mathbf{e}}_L\right)\right] + \ln\left|\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}\right|$$

4. Estimasi $\hat{\beta}$ dan $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_O - \rho\hat{\boldsymbol{\beta}}_L$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\hat{\mathbf{e}}_O - \rho\hat{\mathbf{e}}_L\right)^T\left(\hat{\mathbf{e}}_O - \rho\hat{\mathbf{e}}_L\right)$$

Uji Kecocokan Model SAR

- Uji Kecocokan Model SAR (Perbandingan Model Regresi OLS)

  Hipotesis :

  $H_0 : \rho = 0, \forall_i$ (Model OLS lebih baik)

  $H_1 : \rho \neq 0$ (Model SAR lebih baik)

  Statistik Uji :

  $$F_{hitung} = \frac{\left(SSE_C - SSE_U\right)/\left(\left(p+1\right)-p\right)}{SSE_U/\left(n-p\right)} \sim F_{\alpha/2;\, p\, ;\, (n-p)}$$

  SSE_C = SSE dari model constrained/ dengan anggapan H_0 benar (model OLS)

  SSE_U = SSE dari model unconstrained/ dengan anggapan H_0 salah (model SAR)

- Uji Kecocokan Model Keseluruhan

  Hipotesis :

  $H_0 : \theta_i = 0, \forall_i$ (Model SAR tidak cocok)

  $H_1 : \exists_i \theta_i \neq 0$ (Model SAR cocok)

  Statistik Uji :

  $$F_{hitung} = \frac{\left(SSE_C - SSE_U\right)/\left(p+1\right)}{SSE_U/\left(n-p\right)}$$

  SSE_C = SSE dari model constrained/ dengan anggapan H_0 benar (model tanpa prediktor)

  SSE_U = SSE dari model unconstrained/ dengan anggapan H_0 salah (model SAR)

- Uji Signifikansi Parameter secara individu

  Uji yang paling relevan diterapkan didalam data spasial adalah Uji Wald. Uji Wald ini dapat digunakan untuk menguji signifikansi koefisien model secara individu (Anselin, 1988). Menurut Agresti (2007) prosedur yang dilakukan untuk Uji Wald adalah sebagai berikut :

  Hipotesis:

  H_0: $\beta_j=0$ (Parameter tidak signifikan)

  H_1: $\beta_j\neq0$ (Parameter signifikan)

  Statistik Uji Wald (W):

$$W = \left(\frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)}\right)^2$$

$$SE(\hat{\beta}_j) = \sqrt{(\sigma^2(\hat{\beta}_j))}$$

  Keterangan :

  $SE(\hat{\beta}_j)$ = dugaan galat baku untuk koefisien β_j

  $\hat{\beta}_j$ = nilai dugaan untuk parameter ($\hat{\beta}_j$)

  Keputusan:

  H_0 ditolak jika nilai W > $\chi^2_{(\alpha,1)}$

3.2. Aplikasi Model SAR dengan R

Contoh 3.1:

Perhatikan data pada contoh Bab 1. Berdasarkan data tersebut, akan dibuat model regresi spasial dengan menggunakan metode SCR. Model SCR juga akan dibandingkan dengan model regresi berganda. Sintaks yang digunakan adalah sebagai berikut:

Sintaks:

```
#PERSAMAAN REGRESI
reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN

#OLS
reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
summary(reg.OLS)
```

```
#LM Test
lm.LMtests(reg.OLS,queen.jateng,test='LMlag') #SAR

#SAR
reg.SAR=lagsarlm(reg.eq,data=spJateng, queen.jateng)
summary(reg.SAR)

#Perhitungan AIC
AIC(reg.SAR)
AIC(reg.OLS)

#Perbandingan Model dengan OLS
LR.sarlm(reg.SAR,reg.OLS) # OLS vs SAR
```

Output:

```
> #PERSAMAAN REGRESI
> reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN
> #OLS
> reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
> summary(reg.OLS)

Call:
lm(formula = reg.eq, data = spJateng)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.5502 -0.5978  0.2119  0.8688  1.7548 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  6.970e+01  3.141e+00  22.193   <2e-16 ***
RLS          7.170e-01  3.969e-01   1.807   0.0812 .  
PHBSP        2.548e-02  3.019e-02   0.844   0.4056    
PA           6.285e-04  4.993e-04   1.259   0.2182    
MSKN        -1.805e-01  7.829e-02  -2.306   0.0285 *  
PGLRN       -8.195e-05  2.523e-04  -0.325   0.7476    
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘
’ 1

Residual standard error: 1.397 on 29 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared:  0.5625,      Adjusted R-squared:  0.4
871
F-statistic: 7.457 on 5 and 29 DF,  p-value: 0.000133

> #LM Test
> lm.LMtests(reg.OLS,queen.jateng,test='LMlag') #SAR

        Lagrange multiplier diagnostics for spatial depen
dence

data:
model: lm(formula = reg.eq, data = spJateng)
weights: queen.jateng

LMlag = 4.0865, df = 1, p-value = 0.04323

> #SAR
> reg.SAR=lagsarlm(reg.eq,data=spJateng, queen.jateng)
> summary(reg.SAR)

Call:lagsarlm(formula = reg.eq, data = spJateng, listw = q
ueen.jateng)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.72025 -0.59036  0.22930  0.85226  1.71449

Type: lag
Coefficients: (asymptotic standard errors)
               Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept)  1.0972e+02  1.2762e+01  8.5977 < 2.2e-16
RLS          6.6664e-01  3.1945e-01  2.0868  0.036906
PHBSP        3.5261e-02  2.4646e-02  1.4307  0.152508
PA           3.7194e-04  4.1411e-04  0.8982  0.369098
MSKN        -1.9406e-01  6.3161e-02 -3.0724  0.002123
PGLRN       -9.0458e-06  2.0260e-04 -0.0446  0.964387

Rho: -0.54303, LR test value: 6.5573, p-value: 0.010446
Asymptotic standard error: 0.17203
    z-value: -3.1566, p-value: 0.0015964
Wald statistic: 9.9639, p-value: 0.0015964

Log likelihood: -54.80605 for lag model
ML residual variance (sigma squared): 1.2593, (sigma: 1.12
22)
Number of observations: 35
Number of parameters estimated: 8
AIC: 125.61, (AIC for lm: 130.17)
LM test for residual autocorrelation
test value: 1.0479, p-value: 0.30598
```

```
>
> #Perhitungan AIC
> AIC(reg.SAR)
[1] 125.6121
> AIC(reg.OLS)
[1] 130.1694
>
> #Perbandingan Model dengan OLS
> LR.sarlm(reg.SAR,reg.OLS) # OLS vs SAR

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 6.5573, df = 1, p-value = 0.01045
sample estimates:
Log likelihood of reg.SAR Log likelihood of reg.OLS
                -54.80605                 -58.08469
```

Berdasarkan output tersebut, diperoleh informasi bahwa:

- Model SAR yang diperoleh dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\widehat{AHH}_i = -\,0.54303\sum_{j=1}^{n} w_{ij}AHH_j + 109{,}723 + 0{,}6667RLS_i$$
$$+0{,}0352PHBSP_i + 3{,}7194\text{x } 10^{-4}PA_i$$
$$-0{,}1941MSKN_i + -9.0458\text{x } 10^{-6}PGLRN_i$$

- Salah satu uji dependensi spasial untuk menguatkan penggunaan model SAR adalah dengan menggunakan LM-Test dari model OLS nya. Output menunjukkan bahwa nilai LMlag = 4.0865 (sig. =0.04323) sehingga cukup alasan untuk menggunakan model SAR dalam pemodelan kasus AHH ini.
- Nilai koefisien spasial lag ($\rho = -\,0.54303$) artinya menunjukkan bahwa nilai Angka Harapan Hidup di suatu Kabupaten/Kota akan turun sebesar 0.54303 kali rata-rata AHH dari daerah yang menjadi tetangga/bersinggungan langsung dengan daerah tersebut, dengan asumsi variabel lain bersifat tetap.
- Nilai AIC dari model SAR (125,6121) yang lebih kecil dari model OLS (130,1694). Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa model SAR lebih baik/lebih sesuai untuk menggambarkan

model Angka Harapan Hidup di Jawa Tengah. Hal ini juga didukung oleh nilai statistik Likelihood Ratio Test yang menunjukkan angka 6,5573 dengan sig. 0,01045, yang menunjukkan bahwa ada perbedaan yang sangat nyata antara model SAR dengan model OLS.

Contoh 3.2:

Perhatikan data pada Contoh 3.1, tidak semua variabel prediktor pada model SAR tersebut signifikan terhadap responnya. Untuk memperbaikinya, salah satu caranya adalah dengan mengeluarkan beberapa variabel yang paling tidak signifikan (signifikansinya lemah) dari model tersebut.

Sintaks:

```
#Perbaikan model SAR
reg.SAR2=lagsarlm(AHH~RLS+PHBSP+MSKN,data=spJateng,
queen.jateng)
summary(reg.SAR2)
#Perhitungan AIC
AIC(reg.SAR2)
#Perbandingan Model dengan OLS
LR.sarlm(reg.SAR,reg.SAR2)
```

Output:

```
> #Perbaikan model SAR
> reg.SAR2=lagsarlm(AHH~RLS+PHBSP+MSKN,data=spJateng, quee
n.jateng)
> summary(reg.SAR2)

Call:lagsarlm(formula = AHH ~ RLS + PHBSP + MSKN, data = s
pJateng,     listw = queen.jateng)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.85105 -0.74123  0.21647  0.78642  1.68155

Type: lag
Coefficients: (asymptotic standard errors)
              Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
```

```
(Intercept) 113.025160  12.497522  9.0438 < 2.2e-16
RLS           0.660798   0.240165  2.7514  0.005933
PHBSP         0.034900   0.024791  1.4078  0.159188
MSKN         -0.183674   0.062069 -2.9592  0.003084

Rho: -0.58445, LR test value: 7.9067, p-value: 0.0049252
Asymptotic standard error: 0.17048
    z-value: -3.4282, p-value: 0.00060761
Wald statistic: 11.753, p-value: 0.00060761

Log likelihood: -55.22686 for lag model
ML residual variance (sigma squared): 1.2769, (sigma: 1.13
)
Number of observations: 35
Number of parameters estimated: 6
AIC: 122.45, (AIC for lm: 128.36)
LM test for residual autocorrelation
test value: 0.16121, p-value: 0.68805

> #Perhitungan AIC
> AIC(reg.SAR2)
[1] 122.4537
> #Perbandingan Model dengan OLS
> LR.sarlm(reg.SAR,reg.SAR2)

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 0.84162, df = 2, p-value = 0.6565
sample estimates:
 Log likelihood of reg.SAR Log likelihood of reg.SAR2
                 -54.80605                  -55.22686
```

Dengan mengeluarkan beberapa variabel diperoleh nilai AIC yang lebih kecil dari model SAR sebelumnya. Sebagai latihan dapat dicoba untuk perbaikan dengan mengeluarkan variabel prediktor lainnya yang tidak signifikan.

BAB 4
SPATIAL DURBIN MODEL

4.1. Konsep Dasar Model SDM

Spatial Durbin Model (SDM) merupakan model regresi spasial yang memiliki bentuk seperti *Spatial Autoregressive Model* (SAR) yang memiliki spasial lag pada variabel respon (**y**). Hanya saja, SDM memiliki ciri khas adanya spasial lag pada variabel prediktor (***X***) (Anselin, 1988). Menurut LeSage & Pace (2009) model SDM memiliki bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \alpha \mathbf{1}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}})$$

Atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j + \alpha + \sum_{k=1}^{p} \beta_k x_{ik} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \theta_k (w_{ij} x_{kj}) + \varepsilon_i$$

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (4.2)$$

dengan:

y = vektor variabel respon, berukuran *n* x 1
X = matriks variabel prediktor, berukuran *n* x *p*
$\boldsymbol{Z}$ = $[\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}} \quad \boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{W}\boldsymbol{X}]$
$\boldsymbol{\delta}$ = $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$
ρ = koefisien lag spasial variabel respon (*y*)
α = parameter konstan
β = vektor parameter regresi, berukuran *p* x 1
θ = vektor parameter lag spasial variabel prediktor berukuran *p* x 1
W = matriks pembobot, berukuran *n* x *n*
ε = vektor error, berukuran *n* x 1

$\mathbf{1_n}$ = Vektor yang berisi angka 1 berukuran n x 1

Estimasi Parameter Spasial Durbin Model

Parameter SDM dapat diestimasi dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Fungsi likelihood dibentuk melalui persamaan error ($\boldsymbol{\varepsilon}$) yang berdistribusi normal sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\rho W y} + \boldsymbol{Z\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\rho W y} - \boldsymbol{Z\delta}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I_n} - \boldsymbol{\rho W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta} \qquad (4.3)$$

Fungsi kepadatan peluang dari ε_i dengan $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \boldsymbol{N}(0, \boldsymbol{\sigma^2 I_n})$ adalah sebagai berikut:

$$f(\varepsilon_i|\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2})}$$

Diperoleh fungsi likelihood sebagai berikut:

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i \mid \sigma^2)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2})$$
$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1^2}{2\sigma^2}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_2^2}{2\sigma^2}\right)\right) \dots \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{\varepsilon_n^2}{2\sigma^2})\right)\right]$$
$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2)$$
$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} (\boldsymbol{\varepsilon^T \varepsilon})) \qquad (4.4)$$

Diferensikan persamaan (4.3) terhadap **y**, maka diperoleh fungsi jacobian sebagai berikut:

$$J = \left|\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{y}}\right| = \left|\frac{\partial\left((\boldsymbol{I_n} - \rho \boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta}\right)}{\partial \boldsymbol{y}}\right| = |\boldsymbol{I_n} - \rho \boldsymbol{W}| \qquad (4.5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.3) dan menambahkan persamaan (4.5) kedalam fungsi *likelihood* (4.4) maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$L(\rho,\boldsymbol{\delta},\sigma^2|\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}|J|\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\varepsilon^T\varepsilon}))$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}|\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W}|\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left((\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\delta}\right)^T((\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\delta})\right) \quad (4.6)$$

Fungsi *likelihood* pada persamaan (4.6) di *ln*-kan sehingga terbentuk fungsi *ln likelihood*:

$$l(\rho,\boldsymbol{\delta},\sigma^2|\boldsymbol{y}) = \frac{n}{2}\ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right) + \ln|\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W}| + \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left((\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\delta}\right)^T\left((\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\delta}\right)\right)$$

$$l(\rho,\boldsymbol{\delta},\sigma^2|\boldsymbol{y}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \ln|\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W}| + \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left((\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\delta}\right)^T\left((\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\delta}\right)\right) \quad (4.7)$$

Estimasi Parameter $\boldsymbol{\rho}$

Estimasi parameter ρ diperoleh dengan cara meregresikan variabel **y** terhadap **Z** dan **Wy** terhadap **Z** seperti pada persamaan (4.8).

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z\delta_0} + \boldsymbol{e_0} \text{ dan } \boldsymbol{Wy} = \boldsymbol{Z\delta_d} + \boldsymbol{e_d} \quad (4.8)$$

Hasil estimasi parameter menggunakan metode OLS pada persamaan (4.8) yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\delta_0}} = (\boldsymbol{Z^TZ})^{-1}\boldsymbol{Z^Ty} \text{ dan } \widehat{\boldsymbol{\delta_d}} = (\boldsymbol{Z^TZ})^{-1}\boldsymbol{Z^TWy} \quad (4.9)$$

Dari persamaan (4.9) akan didapatkan residual $\boldsymbol{e_0}$ dan $\boldsymbol{e_d}$ yang akan disubstitusikan pada parameter σ^2, seperti pada persamaan berikut:

$$\boldsymbol{e_0} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta_0}} \text{ dan } \boldsymbol{e_d} = \boldsymbol{Wy} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta_d}} \quad (4.10)$$

$$\sigma^2 = \frac{\{[\boldsymbol{e_0}-\rho\boldsymbol{e_d}]^T[\boldsymbol{e_0}-\rho\boldsymbol{e_d}]\}}{n} \quad (4.11)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.11) pada persamaan (4.7) didapatkan fungsi logaritma natural untuk mengestimasi ρ:

$$l(\rho|\boldsymbol{y}) = C - \frac{n}{2}\ln([\boldsymbol{e_0}-\rho\boldsymbol{e_d}]^T[\boldsymbol{e_0}-\rho\boldsymbol{e_d}]) + \ln|\boldsymbol{I_n}-\rho\boldsymbol{W}|$$

Dimana C adalah konstanta yang tidak bergantung pada parameter ρ. Besar parameter ρ adalah pada rentang

$\frac{1}{\lambda_{max}} < \rho < \frac{1}{\lambda_{min}}$ dengan λ adalah nilai eigen dari matriks **W** yang terstandarisasi (Le Sage, 1999).

Estimasi Parameter $\boldsymbol{\delta}$

Estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$ pada model SDM diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *ln likelihood* dari persamaan (4.7) yaitu dengan mendiferensikan persamaan tersebut terhadap $\boldsymbol{\delta}$.

$$\left.\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\delta}}\right| = 0$$

$$\left.\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\delta}}\right| = \frac{\partial(-\frac{1}{2\sigma^2}\big((\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta}\big)^T\big((\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta}\big))}{\partial \boldsymbol{\delta}}$$

$$0 = \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{Z}^T(\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z\delta})$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T(\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}$$

Sehingga estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$ yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = (\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T(\boldsymbol{I_n} - \hat{\rho}\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = (\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{y} - \hat{\rho}(\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Wy} = \widehat{\boldsymbol{\delta_0}} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta_d}}$$

Estimator $\widehat{\boldsymbol{\delta_0}}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\delta_d}}$ diperoleh dari model $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z\delta_0} + \boldsymbol{e_0}$ dan $\boldsymbol{Wy} = \boldsymbol{Z\delta_d} + \boldsymbol{e_d}$ melalui model OLS, sehingga estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$ menjadi:

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = \widehat{\boldsymbol{\delta_0}} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta_d}} \tag{4.12}$$

Estimasi Parameter $\boldsymbol{\sigma^2}$

Estimasi parameter σ^2 diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *ln likelihood* dari persamaan (4.7), yaitu dengan mendiferensikan persamaan tersebut terhadap σ^2.

$$\left.\frac{\partial l}{\partial \sigma^2}\right| = 0$$

$$\left.\frac{\partial l}{\partial \sigma^2}\right| = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}((\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta})^T((\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta})$$

$$0 = -n + \frac{1}{\sigma^2}((\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta})^T((\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta})$$

$$\sigma^2 = \frac{((\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta})^T((\boldsymbol{I_n} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\delta})}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta})^T(\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta})}{n}$$

Maka estimasi parameter untuk σ^2 yaitu:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{(\boldsymbol{y} - \hat{\rho} \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}})^T(\boldsymbol{y} - \hat{\rho} \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}})}{n} \tag{4.13}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.12) ke persamaan (4.13) maka akan menadi persamaan berikut:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{(\boldsymbol{y} - \hat{\rho} \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}(\widehat{\boldsymbol{\delta}_0} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta}_d}))^T(\boldsymbol{y} - \hat{\rho} \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}(\widehat{\boldsymbol{\delta}_0} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta}_d}))}{n}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}_0} - \hat{\rho}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}_d}))^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}_0} - \hat{\rho}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}_d}))}{n} \tag{4.14}$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.10) terhadap persamaan (4.14).

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{(\boldsymbol{e}_0 - \hat{\rho}\boldsymbol{e}_d)^T(\boldsymbol{e}_0 - \hat{\rho}\boldsymbol{e}_d)}{n} \tag{4.15}$$

Setelah didapatkan MLE untuk masing-masing parameter, selanjutnya harus dibuktikan bahwa parameter tersebut benar-benar berada pada titik maksimum. Syarat untuk memaksimumkan fungsi dari *ln likelihood* adalah jika matriks hessian merupakan matriks definit negatif. Matriks hessian adalah matriks simetri **A** yang berisi persilangan turunan parsial dari $\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_j \partial \beta_s}$ dengan j = 1, 2, …, p dan s = 1, 2, …, p (Jong dan Heller, 2008). Bentuk matriks Hessian adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_j \partial \beta_s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_1 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_1 \partial \beta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_p \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_p \partial \beta_p} \end{pmatrix}$$

Matriks hessian yang komponennya berisi matriks turunan kedua disebut matriks definit negatif jika $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} < 0$.

Sehingga secara ringkas, langkah-langkah estimasi parameter Model SDM:

1. Regresikan $\mathbf{y}$ terhadap $\mathbf{Z}$, $\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}_0 + \mathbf{e}_0$
   OLS: $\widehat{\boldsymbol{\delta}}_0 = (\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$
   Residual : $\hat{\mathbf{e}}_0 = \boldsymbol{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_0$
2. Regresikan $\mathbf{Wy}$ terhadap $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Wy} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{e}_d$

OLS: $\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{d}} = (\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z})^{-\mathbf{1}}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{y}$

Residual: $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{W}\mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{d}}$

3. Mencari parameter ρ dengan memaksimalkan fungsi likelihood

$$\ln\big(L(\rho)\big) = C - \frac{n}{2}\ln([\mathbf{e_0} - \rho\mathbf{e_d}]^{\boldsymbol{T}}[\mathbf{e_0} - \rho\mathbf{e_d}]) + ln|\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}|$$

4. Estimasi $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ dan $\hat{\sigma}^2$

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{0}} - \hat{\rho}\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{d}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\{[\mathbf{e_0} - \hat{\rho}\mathbf{e_d}]^{\boldsymbol{T}}[\mathbf{e_0} - \hat{\rho}\mathbf{e_d}]\}}{n}$$

Uji Kecocokan Model

Uji Kecocokan Model SDM (Perbandingan Model Regresi OLS)

Hipotesis:

$H_0 : \rho = \theta_i = 0, \forall_i$ (Model OLS lebih baik)

$H_1 : \rho \neq 0, \exists_i \theta_i \neq 0$ (Model SDM lebih baik)

Statistik Uji:

$$F_{hitung} = \frac{(SSE_C - SSE_U)/((2p+1)-p)}{SSE_U/(n-2p)} \sim F_{\alpha/2;\, p+1\,;\,(n-2p)}$$

SSE_C = SSE dari model constrained/ dengan anggapan H_0 benar (model OLS)

SSE_U = SSE dari model unconstrained/ dengan anggapan H_0 salah (model SDM)

Uji Signifikansi Parameter

Pengujian signifikansi parameter pemodelan spasial menggunakan uji Wald (Anselin, 1988). Dalam Ramadani (2013), untuk menguji parameter ρ digunakan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho \neq 0$

Statistik uji dinyatakan pada persamaan:

$$Wald_{\rho} = \frac{\hat{\rho}^2}{\text{var}(\hat{\rho})}$$

Untuk menguji parameter β:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0, j = 1, 2, ..., p$$

dengan statistik uji:

$$Wald_{\beta} = \frac{\hat{\beta}_j^{\,2}}{\text{var}(\hat{\beta}_j)}$$

Untuk parameter θ menggunakan hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \theta_j = 0$$

$$H_1 : \theta_j \neq 0, j = 1, 2, ..., p$$

statistik uji:

$$Wald_{\theta} = \frac{\hat{\theta}_j^{\,2}}{\text{var}(\hat{\theta}_j)}$$

dengan $\text{var}(\hat{\rho})$ adalah elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap ρ, $\text{var}(\hat{\beta}_j)$ adalah elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap β, $\text{var}(\hat{\theta}_j)$ adalah elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap θ. Kriteria pengambilan keputusan adalah H_0 ditolak jika nilai $Wald > \chi^2_{\alpha,1}$.

4.2. Aplikasi Model SDM dengan R

Contoh 4.1.

Perhatikan data pada contoh Bab 1. Berdasarkan data tersebut, akan dibuat model regresi spasial dengan menggunakan metode SDM. Model SDM juga akan dibandingkan dengan model regresi berganda (OLS), SAR dan SCR. Sintaks yang digunakan adalah sebagai berikut:

Sintaks:

```
#PERSAMAAN REGRESI
reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN

#OLS
reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
summary(reg.OLS)

#SDM
reg.SDM=lagsarlm(reg.eq,data=spJateng,
queen.jateng,type="mixed")
summary(reg.SDM)

#Perhitungan AIC
AIC(reg.SDM)
AIC(reg.OLS)
#Perbandingan Model dengan OLS
LR.sarlm(reg.SDM,reg.OLS) # SDM vs OLS
LR.sarlm(reg.SDM,reg.SAR) # SDM vs SAR
LR.sarlm(reg.SDM,reg.SLX) # SDM vs SCR
```

Output:

```
> #PERSAMAAN REGRESI
> reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN
>
> #OLS
> reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
> summary(reg.OLS)

Call:
lm(formula = reg.eq, data = spJateng)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.5502 -0.5978  0.2119  0.8688  1.7548

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.970e+01  3.141e+00  22.193   <2e-16 ***
RLS          7.170e-01  3.969e-01   1.807   0.0812 .
```

```
PHBSP         2.548e-02  3.019e-02   0.844   0.4056
PA            6.285e-04  4.993e-04   1.259   0.2182
MSKN         -1.805e-01  7.829e-02  -2.306   0.0285 *
PGLRN        -8.195e-05  2.523e-04  -0.325   0.7476
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘
’ 1

Residual standard error: 1.397 on 29 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5625,      Adjusted R-squared:  0.4
871
F-statistic: 7.457 on 5 and 29 DF,  p-value: 0.000133

>
> #SDM
> reg.SDM=lagsarlm(reg.eq,data=spJateng, queen.jateng,type
="mixed")
> summary(reg.SDM)

Call:lagsarlm(formula = reg.eq, data = spJateng, listw = q
ueen.jateng,     type = "mixed")

Residuals:
       Min         1Q     Median         3Q        Max
-3.1359728 -0.3536494 -0.0040474  0.5892663  1.3278160

Type: mixed
Coefficients: (asymptotic standard errors)
               Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept)  1.2358e+02  1.5972e+01  7.7372 1.021e-14
RLS          8.8037e-01  2.9287e-01  3.0060  0.002647
PHBSP        3.5371e-02  2.0558e-02  1.7205  0.085336
PA           6.2713e-04  3.7597e-04  1.6680  0.095310
MSKN        -1.4578e-01  5.1684e-02 -2.8206  0.004793
PGLRN        2.4988e-04  1.6733e-04  1.4933  0.135359
lag.RLS      2.6862e-01  5.8323e-01  0.4606  0.645107
lag.PHBSP   -6.3070e-02  4.2666e-02 -1.4782  0.139344
lag.PA       3.0529e-03  6.6414e-04  4.5967 4.292e-06
lag.MSKN    -1.7747e-01  1.1929e-01 -1.4877  0.136838
lag.PGLRN   -2.3995e-04  3.9620e-04 -0.6056  0.544751

Rho: -0.73431, LR test value: 6.958, p-value: 0.0083447
Asymptotic standard error: 0.20909
    z-value: -3.512, p-value: 0.00044475
Wald statistic: 12.334, p-value: 0.00044475

Log likelihood: -46.22147 for mixed model
ML residual variance (sigma squared): 0.7307, (sigma: 0.85
481)
Number of observations: 35
```

```
Number of parameters estimated: 13
AIC: 118.44, (AIC for lm: 123.4)
LM test for residual autocorrelation
test value: 7.4497, p-value: 0.0063445

>
> #Perhitungan AIC
> AIC(reg.SDM)
[1] 118.4429
> AIC(reg.OLS)
[1] 130.1694
> #Perbandingan Model dengan OLS
> LR.sarlm(reg.SDM,reg.OLS) # SDM vs OLS

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 23.726, df = 6, p-value = 0.0005863
sample estimates:
Log likelihood of reg.SDM Log likelihood of reg.OLS
                -46.22147                 -58.08469

> LR.sarlm(reg.SDM,reg.SAR) # SDM vs SAR

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 17.169, df = 5, p-value = 0.00419
sample estimates:
Log likelihood of reg.SDM Log likelihood of reg.SAR
                -46.22147                 -54.80605

> LR.sarlm(reg.SDM,reg.SLX) # SDM vs SCR

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 6.958, df = 1, p-value = 0.008345
sample estimates:
Log likelihood of reg.SDM Log likelihood of reg.SLX
                -46.22147                 -49.70045
```

Berdasarkan output tersebut, diperoleh informasi bahwa:

- Model SDM yang diperoleh dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\widehat{AHH}_i = -0{,}7343\sum_{j=1}^{n} w_{ij}AHH_j + 123{,}5751 + 0{,}8804RLS_i$$
$$+0{,}0354PHBSP_i + 6{,}2712\text{x}10^{-4}PA_i$$
$$-0{,}1458MSKN_i + 2{,}4988\text{x}10^{-4}PGLRN_i$$
$$+ 0{,}2686\sum_{j=1}^{n} w_{ij}RLS_j - 0{,}0631\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PHBSP_j$$
$$+ 0{,}0031\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PA_j - 0{,}1774\sum_{j=1}^{n} w_{ij}MSKN_j$$
$$- 2{,}3995\text{x}10^{-4}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PGLRN_j$$

- Nilai koefisien spasial lag ($\rho = -0{,}7343$) artinya menunjukkan bahwa nilai Angka Harapan Hidup di suatu Kabupaten/Kota akan turun sebesar 0,7343 kali rata-rata AHH dari daerah yang menjadi tetangga/bersinggungan langsung dengan daerah tersebut, dengan asumsi variabel lain bersifat tetap.
- Nilai AIC dari model SDM (118,4429) yang lebih kecil dari model OLS (130,1694). Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa model SDM lebih baik/lebih sesuai untuk menggambarkan model Angka Harapan Hidup di Jawa Tengah.
- Bila dibandingkan dengan model OLS, model SDM dapat dikatakan lebih baik karena nilai statistik Likelihood Ratio Test menunjukkan angka 23,726 dengan sig. 0,0006.
- Bila dibandingkan dengan model SAR, model SDM dapat dikatakan juga lebih baik karena nilai statistik Likelihood Ratio Test menunjukkan angka 17,169 dengan sig. 0,0042.
- Bila dibandingkan dengan model SCR, model SDM dapat dikatakan lebih baik karena nilai statistik Likelihood Ratio Test menunjukkan angka 6,958 dengan sig. 0,0084.

Contoh 4.2:

Perhatikan data pada Contoh 4.1, tidak semua variabel prediktor pada model SDM tersebut signifikan terhadap responnya. Untuk memperbaikinya, salah satu caranya adalah dengan mengeluarkan beberapa variabel yang paling tidak signifikan (signifikansinya lemah) dari model tersebut.

Sintaks:

```
#Perbaikan model SDM
#Mengambil Matriks Variabel Prediktor dari model OLS
X=model.matrix(reg.OLS)
#Membentuk matriks lag spasial
lagX = create_WX(X,queen.jateng,prefix = "lag")
spJateng2=cbind(spJateng,lagX)
#Membuat model SCR secara manual
reg.SDM2=lagsarlm(AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN+lag.
PHBSP+lag.PA+lag.MSKN,queen.jateng,data=spJateng2)
summary(reg.SDM2)
#AIC SDM perbaikan
AIC(reg.SDM2)
#Perbandingan Model dengan SDM sebelumnya
LR.sarlm(reg.SDM,reg.SDM2)
```

Output:

```
> #Perbaikan model SDM
> #Mengambil Matriks Variabel Prediktor dari model OLS
> X=model.matrix(reg.OLS)
> #Membentuk matriks lag spasial
> lagX = create_WX(X,queen.jateng,prefix = "lag")
> spJateng2=cbind(spJateng,lagX)
> #Membuat model SCR secara manual
> reg.SDM2=lagsarlm(AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN+lag.PHBSP+
lag.PA+lag.MSKN,queen.jateng,data=spJateng2)
> summary(reg.SDM2)

Call:lagsarlm(formula = AHH ~ RLS + PHBSP + PA + MSKN + PG
LRN + lag.PHBSP +
    lag.PA + lag.MSKN, data = spJateng2, listw = queen.jat
eng)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-3.148705 -0.378448  0.066748  0.588203  1.326368

Type: lag
```

```
Coefficients: (asymptotic standard errors)
               Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept)  1.2202e+02  1.6029e+01  7.6126 2.687e-14
RLS          8.1751e-01  2.7200e-01  3.0055  0.002651
PHBSP        3.7445e-02  2.0411e-02  1.8345  0.066575
PA           6.6983e-04  3.3185e-04  2.0185  0.043540
MSKN        -1.5411e-01  5.0455e-02 -3.0545  0.002255
PGLRN        2.5408e-04  1.6605e-04  1.5301  0.125982
lag.PHBSP   -6.3789e-02  3.8110e-02 -1.6738  0.094167
lag.PA       2.9791e-03  6.2924e-04  4.7344 2.197e-06
lag.MSKN    -1.6593e-01  1.0929e-01 -1.5183  0.128938

Rho: -0.71499, LR test value: 7.2439, p-value: 0.0071141
Asymptotic standard error: 0.20403
    z-value: -3.5044, p-value: 0.00045756
Wald statistic: 12.281, p-value: 0.00045756

Log likelihood: -46.40089 for lag model
ML residual variance (sigma squared): 0.74287, (sigma: 0.8
619)
Number of observations: 35
Number of parameters estimated: 11
AIC: 114.8, (AIC for lm: 120.05)
LM test for residual autocorrelation
test value: 3.9171, p-value: 0.047799

> #AIC SDM perbaikan
> AIC(reg.SDM2)
[1] 114.8018
> #Perbandingan Model dengan SDM sebelumnya
> LR.sarlm(reg.SDM,reg.SDM2)

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 0.35885, df = 2, p-value = 0.8357
sample estimates:
 Log likelihood of reg.SDM Log likelihood of reg.SDM2
                -46.22147                  -46.40089
```

Untuk membentuk model SDM baru, kita gunakan fungsi seperti pada model SAR tetapi dengan menambahkan lag spasial dari variabel prediktor dalam persamaan regresinya. Dengan mengeluarkan beberapa variabel diperoleh nilai AIC yang lebih kecil dari model SDM sebelumnya. Sebagai latihan dapat dicoba untuk perbaikan dengan mengeluarkan variabel prediktor lainnya yang tidak signifikan.

BAB 5
SPATIAL ERROR MODEL

5.1. Konsep Dasar Model SDM

Spatial Error Model (SEM) dapat digunakan saat nilai error pada suatu lokasi berkorelasi dengan nilai error dengan lokasi sekitarnya atau dengan kata lain terdapat korelasi spasial antar error. Pada model SEM, bentuk error pada lokasi i merupakan fungsi dari error pada lokasi j dimana j merupakan suatu lokasi yang terletak disekitar lokasi i. Dalam notasi matriks, model SEM secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (5.1)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{v}$$

Estimasi parameter Model SEM dengan MLE

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{v}$$
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)^{-1}\mathbf{v}$$

Sehingga model SEM menjadi:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)^{-1}\mathbf{v} \qquad (5.2)$$

$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right) \qquad \rightarrow \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}\right| = \left|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right|$$

Dengan Metode MLE

$$L_v = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{v}^T\mathbf{v}\right)$$

$$L_y = L_v . \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \right|$$

$$L_y = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}} \left|\mathbf{I} - \lambda \mathbf{W}\right| \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{v}^T\mathbf{v}\right)$$

$$\ln\left(L_y\right) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \ln\left|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right| - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathbf{v}^T\mathbf{v}\right)$$

$$\ln\left(L_y\right) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \ln\left|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right|$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right)$$

Langkah-langkah Estimasi Parameter SEM

1. Estimasi OLS $\mathbf{W}\mathbf{y}$ hanya terhadap $\mathbf{X}$

   OLS: $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{y}$

2. Hitung error OLS $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{W}\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$

3. Mencari parameter λ yang memaksimalkan $ln\mathrm{L}_c(\lambda)$ dengan

   $$Max \ln L_C(\lambda) = C - \frac{n}{2}\ln\left[\frac{1}{n}\hat{\mathbf{e}}^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\hat{\mathbf{e}}\right]$$
   $$+ \ln\left|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right|$$

4. Estimasi parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$

   Dengan: $\mathbf{y}^* = \left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\mathbf{y}$ dan $\mathbf{X}^* = \left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\mathbf{X}$

   Sehingga

   $$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} = \left(\mathbf{X}^{*T}\,\mathbf{X}^*\right)^{-1}\mathbf{X}^{*T}\,\mathbf{y}^*$$
   $$= \left(\mathbf{X}^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\mathbf{y}$$

5. Hitung error baru berdasarkan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$

   $$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$$

6. Cek konvergensi? (Bandingkan hasil error di langkah 2 dan langkah 5)

   Jika tidak, kembali ke langkah 3

   Jika ya, lanjut ke langkah 7

7. Hitung estimasi

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n}\mathbf{e}^T(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^T(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})\mathbf{e}$$

Uji Hipotesis:

- Uji Kecocokan Model SEM (Perbandingan dengan Model Regresi OLS)

  Hipotesis :

  $H_0 : \lambda = 0$ (Model OLS lebih baik)

  $H_1 : \lambda \neq 0$ (Model SEM lebih baik)

  Statistik Uji :

$$F_{hitung} = \frac{(SSE_C - SSE_U)/((p+1)-p)}{SSE_U/(n-p)} \sim F_{\alpha/2;\,1\,;\,(n-p)}$$

  SSE_C = SSE dari model constrained/ dengan anggapan H_0 benar (model OLS)

  SSE_U = SSE dari model unconstrained/ dengan anggapan H_0 salah (model SEM)

- Uji Signifikansi parameter model SEM

  Pengujian signifikansi parameter pemodelan spasial menggunakan uji Wald (Anselin, 1988).

  Uji hipotesis parameter λ digunakan hipotesis sebagai berikut:

  $H_0 : \lambda = 0$

  $H_1 : \lambda \neq 0$

  Statistik uji dinyatakan pada persamaan:

$$Wald_\lambda = \frac{\hat{\lambda}^2}{\mathrm{var}(\hat{\lambda})}$$

Untuk menguji parameter β:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0,\ j = 1, 2, \dots, p$$

dengan statistik uji:

$$Wald_\beta = \frac{\hat{\beta}_j^{\,2}}{\mathrm{var}(\hat{\beta}_j)}$$

dengan $\mathrm{var}\left(\hat{\lambda}\right)$ adalah elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap λ, $\mathrm{var}\left(\hat{\beta}_j\right)$ adalah elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap β. Kriteria pengambilan keputusan adalah H_0 ditolak jika nilai $Wald > \chi^2_{\alpha,1}$.

5.2. Aplikasi Model SEM dengan R

Contoh 5.1.

Perhatikan data pada contoh Bab 1. Berdasarkan data tersebut, akan dibuat model regresi spasial dengan menggunakan metode SEM. Model SEM juga akan dibandingkan dengan model regresi berganda (OLS). Sintaks yang digunakan adalah sebagai berikut:

Sintaks:

```
#PERSAMAAN REGRESI
reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN

#OLS
reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
summary(reg.OLS)

#LM Test
lm.LMtests(reg.OLS,queen.jateng,test='LMerr') #SEM

#SAR
```

```
reg.SEM=errorsarlm(reg.eq,data=spJateng, queen.jateng)
summary(reg.SEM)

#Perhitungan AIC
AIC(reg.SEM)
AIC(reg.OLS)
#Perbandingan Model dengan OLS
LR.sarlm(reg.SEM,reg.OLS) # SEM vs OLS
```

Output:

```
> #PERSAMAAN REGRESI
> reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN
> #OLS
> reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
> summary(reg.OLS)

Call:
lm(formula = reg.eq, data = spJateng)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.5502 -0.5978  0.2119  0.8688  1.7548 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  6.970e+01  3.141e+00  22.193   <2e-16 ***
RLS          7.170e-01  3.969e-01   1.807   0.0812 .  
PHBSP        2.548e-02  3.019e-02   0.844   0.4056    
PA           6.285e-04  4.993e-04   1.259   0.2182    
MSKN        -1.805e-01  7.829e-02  -2.306   0.0285 *  
PGLRN       -8.195e-05  2.523e-04  -0.325   0.7476    
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 '
' 1

Residual standard error: 1.397 on 29 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5625,     Adjusted R-squared:  0.4
871
F-statistic: 7.457 on 5 and 29 DF,  p-value: 0.000133

> #LM Test
> lm.LMtests(reg.OLS,queen.jateng,test='LMerr') #SEM

        Lagrange multiplier diagnostics for spatial depen
dence
```

```
data:
model: lm(formula = reg.eq, data = spJateng)
weights: queen.jateng

LMErr = 1.6706, df = 1, p-value = 0.1962

> #SAR
> reg.SEM=errorsarlm(reg.eq,data=spJateng, queen.jateng)
> summary(reg.SEM)

Call:errorsarlm(formula = reg.eq, data = spJateng, listw =
queen.jateng)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.22846 -0.68348  0.13875  0.84417  1.77654

Type: error
Coefficients: (asymptotic standard errors)
               Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept) 70.71779207  2.45793412 28.7712 < 2.2e-16
RLS          0.30722446  0.32030705  0.9592  0.337480
PHBSP        0.01900189  0.02005509  0.9475  0.343392
PA           0.00110401  0.00042440  2.6014  0.009286
MSKN        -0.17459680  0.05583921 -3.1268  0.001767
PGLRN        0.00012924  0.00019675  0.6569  0.511260

Lambda: -0.86827, LR test value: 6.3536, p-value: 0.011714
Asymptotic standard error: 0.20373
    z-value: -4.2618, p-value: 2.0282e-05
Wald statistic: 18.163, p-value: 2.0282e-05

Log likelihood: -54.9079 for error model
ML residual variance (sigma squared): 1.1426, (sigma: 1.06
89)
Number of observations: 35
Number of parameters estimated: 8
AIC: 125.82, (AIC for lm: 130.17)

> #Perhitungan AIC
> AIC(reg.SEM)
[1] 125.8158
> AIC(reg.OLS)
[1] 130.1694
> #Perbandingan Model dengan OLS
> LR.sarlm(reg.SEM,reg.OLS) # SEM vs OLS

        Likelihood ratio for spatial linear models
```

```
data:
Likelihood ratio = 6.3536, df = 1, p-value = 0.01171
sample estimates:
Log likelihood of reg.SEM Log likelihood of reg.OLS
                -54.90790                 -58.08469
```

Berdasarkan output tersebut, diperoleh informasi bahwa:

- Model SEM yang diperoleh dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\widehat{AHH}_i = 70{,}7178 + 0{,}3072RLS_i + 0{,}0190PHBSP_i + 0{,}0011PA_i - 0{,}1746MSKN_i + 1{,}1924\text{x}10^{-4}PGLRN_i + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = -\, 0{,}8683\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\varepsilon_j$$

- Salah satu uji dependensi spasial erros untuk menguatkan penggunaan model SEM adalah dengan menggunakan LM-Test dari model OLS nya. Output menunjukkan bahwa nilai LMerr = 1,6706 (sig. =0,1962) sehingga sebenarnya kurang cukup alasan untuk menggunakan model SEM dalam pemodelan kasus AHH ini karena tingkat signifikansinya lebih dari 5% (mendekati 20%).
- Nilai koefisien spasial lag ($\lambda = -\, 0{,}8683$) artinya menunjukkan bahwa nilai error di suatu Kabupaten/Kota akan turun sebesar 0,8683 kali rata-rata error dari daerah yang menjadi tetangga/bersinggungan langsung dengan daerah tersebut, dengan asumsi variabel lain bersifat tetap.
- Nilai AIC dari model SEM (125,8158) yang lebih kecil dari model OLS (130,1694). Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa model SEM lebih baik/lebih sesuai untuk menggambarkan model Angka Harapan Hidup di Jawa Tengah.
- Bila dibandingkan dengan model OLS, model SEM dapat dikatakan lebih baik karena nilai statistik Likelihood Ratio Test menunjukkan angka 6,3536 dengan sig. 0,0117.

Contoh 5.2:

Perhatikan data pada Contoh 5.1, tidak semua variabel prediktor pada model SEM tersebut signifikan terhadap responnya. Untuk memperbaikinya, salah satu caranya adalah dengan mengeluarkan beberapa variabel yang paling tidak signifikan (signifikansinya lemah) dari model tersebut.

Sintaks:

```
#Perbaikan model SEM
reg.SEM2=errorsarlm(AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN,data=spJate
ng, queen.jateng)
summary(reg.SEM2)
#Perhitungan AIC
AIC(reg.SEM2)
#Perbandingan Model dengan SEM sebelumnya
LR.sarlm(reg.SEM,reg.SEM2)
```

Output:

```
> #Perbaikan model SEM
> reg.SEM2=errorsarlm(AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN,data=spJateng,
queen.jateng)
> summary(reg.SEM2)

Call:errorsarlm(formula = AHH ~ RLS + PHBSP + PA + MSKN, d
ata = spJateng,     listw = queen.jateng)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.25364 -0.65708  0.18361  0.73145  2.02761

Type: error
Coefficients: (asymptotic standard errors)
              Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept) 71.0117021  2.4513885 28.9680 < 2.2e-16
RLS          0.4665178  0.2164051  2.1558  0.031102
PHBSP        0.0180968  0.0204852  0.8834  0.377016
PA           0.0010132  0.0004147  2.4432  0.014556
MSKN        -0.1754599  0.0570933 -3.0732  0.002118

Lambda: -0.81561, LR test value: 6.0921, p-value: 0.013579
Asymptotic standard error: 0.2099
    z-value: -3.8857, p-value: 0.00010202
Wald statistic: 15.099, p-value: 0.00010202
```

```
Log likelihood: -55.10222 for error model
ML residual variance (sigma squared): 1.1794, (sigma: 1.08
6)
Number of observations: 35
Number of parameters estimated: 7
AIC: 124.2, (AIC for lm: 128.3)

> #Perhitungan AIC
> AIC(reg.SEM2)
[1] 124.2044
> #Perbandingan Model dengan SEM sebelumnya
> LR.sarlm(reg.SEM,reg.SEM2)

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 0.38865, df = 1, p-value = 0.533
sample estimates:
 Log likelihood of reg.SEM Log likelihood of reg.SEM2
                 -54.90790                  -55.10222
```

Untuk membentuk model SEM baru, kita gunakan fungsi seperti pada model SEM tetapi dengan menghapus variabel yang paling tidak signifikan (Prob. Paling besar). Dengan mengeluarkan beberapa variabel diperoleh nilai AIC yang lebih kecil dari model SEM sebelumnya. Sebagai latihan dapat dicoba untuk perbaikan dengan mengeluarkan variabel prediktor lainnya yang tidak signifikan.

BAB 6
SPATIAL DURBIN ERROR MODEL

6.1. Konsep Dasar Model SDEM

Spatial Durbin Error Model (SDEM) merupakan model regresi spasial yang memiliki bentuk seperti *Spatial Error Model* (SEM) yang memiliki spasial lag pada variabel error ($\boldsymbol{\varepsilon}$). Hanya saja, SDEM memiliki ciri khas adanya spasial lag pada variabel prediktor (**X**). Secara matematis, model SDEM memiliki bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \alpha\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.1)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{v}$$

Atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.2)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{v}$$

dengan:

y = vektor variabel respon, berukuran *n* x 1
X = matriks variabel prediktor, berukuran *n* x *p*
$\boldsymbol{Z}$ = $[\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}} \quad \boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{WX}]$
$\boldsymbol{\delta}$ = $\begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$
λ = koefisien lag spasial error (ε)
α = parameter konstan
β = vektor parameter regresi, berukuran *p* x 1
θ = vektor parameter lag spasial variabel prediktor berukuran *p* x 1
W = matriks pembobot, berukuran *n* x *n*
ε = vektor error, berukuran *n* x 1

Estimasi parameter Model SDEM dengan MLE

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{W}\right)\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{W}\right)^{-1} \mathbf{v}$$

Sehingga model SEM menjadi:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z\delta} + \left(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{W}\right)^{-1} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{W}\right)\left(\mathbf{y} - \mathbf{Z\delta}\right) \qquad \rightarrow \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}\right| = \left|\mathbf{I} - \lambda \mathbf{W}\right|$$

Dengan Metode MLE

$$L_v = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{v}^T\mathbf{v}\right)$$

$$L_y = L_v . \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}\right|$$

$$L_y = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}} \left|\mathbf{I} - \lambda \mathbf{W}\right| \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{v}^T\mathbf{v}\right)$$

$$\ln\left(L_y\right) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \ln\left|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right| - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathbf{v}^T\mathbf{v}\right)$$

$$\ln\left(L_y\right) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \ln\left|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right|$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(\mathbf{y} - \mathbf{Z\delta}\right)^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)^T\left(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}\right)\left(\mathbf{y} - \mathbf{Z\delta}\right)\right)$$

Langkah-langkah Estimasi Parameter SEM

8. Estimasi OLS $\mathbf{Wy}$ hanya terhadap $\mathbf{Z}$

   OLS: $\hat{\boldsymbol{\delta}} = (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{Wy}$

9. Hitung error OLS $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{Wy} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}}$

10. Mencari parameter λ yang memaksimalkan $ln L_c(\lambda)$ dengan

$$Max \ln L_C(\lambda) = C - \frac{n}{2}\ln\left[\frac{1}{n}\hat{\mathbf{e}}^T (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})^T (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})\hat{\mathbf{e}}\right] + \ln|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W}|$$

11. Estimasi parameter $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{GLS} = \hat{\boldsymbol{\delta}}_{ML}$

    Dengan: $\mathbf{y}^* = (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})\mathbf{y}$ dan $\mathbf{Z}^* = (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})\mathbf{Z}$

    Sehingga

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{ML} = \left(\mathbf{Z}^{*T}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*T}\mathbf{y}^*$$

$$= \left(\mathbf{Z}^T (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})^T (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})^T (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})\mathbf{y}$$

12. Hitung error baru berdasarkan $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{ML}$

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{ML}$$

13. Cek konvergensi? (Bandingkan hasil error di langkah 2 dan langkah 5)

    Jika tidak, kembali ke langkah 3

    Jika ya, lanjut ke langkah 7

14. Hitung estimasi

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}\mathbf{e}^T (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})^T (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})\mathbf{e}$$

Uji Hipotesis:

- Uji Kecocokan Model SDEM (Perbandingan dengan Model Regresi OLS)

  Hipotesis :

  $H_0 : \lambda = 0$ (Model OLS lebih baik)

  $H_1 : \lambda \neq 0$ (Model SDEM lebih baik)

  Statistik Uji :

$$F_{hitung} = \frac{(SSE_C - SSE_U)/((p+1) - p)}{SSE_U/(n-p)} \sim F_{\alpha/2;\,1\,;\,(n-p)}$$

SSE_C = SSE dari model constrained/ dengan anggapan H_0 benar (model OLS)

SSE_U = SSE dari model unconstrained/ dengan anggapan H_0 salah (model SEM)

- Uji Signifikansi parameter model SEM

  Pengujian signifikansi parameter pemodelan spasial menggunakan uji Wald (Anselin, 1988).

  Uji hipotesis parameter λ digunakan hipotesis sebagai berikut:

  $H_0 : \lambda = 0$

  $H_1 : \lambda \neq 0$

  Statistik uji dinyatakan pada persamaan:

  $$Wald_\lambda = \frac{\hat{\lambda}^2}{\text{var}\left(\hat{\lambda}\right)}$$

  Untuk menguji parameter β:

  $H_0 : \beta_j = 0$

  $H_1 : \beta_j \neq 0,\ j = 1, 2, ..., p$

  dengan statistik uji:

  $$Wald_\beta = \frac{\hat{\beta}_j^{\ 2}}{\text{var}(\hat{\beta}_j)}$$

  Untuk parameter θ menggunakan hipotesis sebagai berikut:

  $H_0 : \theta_j = 0$

  $H_1 : \theta_j \neq 0,\ j = 1, 2, ..., p$

  statistik uji:

  $$Wald_\theta = \frac{\hat{\theta}_j^{\ 2}}{\text{var}(\hat{\theta}_j)}$$

dengan $\operatorname{var}(\hat{\lambda})$ adalah elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap λ, $\operatorname{var}(\hat{\beta}_j)$ adalah elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap β, $\operatorname{var}(\hat{\theta}_j)$ adalah elemen diagonal dari matriks varians yang berkorespondensi terhadap θ. Kriteria pengambilan keputusan adalah H_0 ditolak jika nilai $Wald > \chi^2_{\alpha,1}$.

6.2. Aplikasi Model SDEM dengan R

Contoh 6.1.

Perhatikan data pada contoh Bab 1. Berdasarkan data tersebut, akan dibuat model regresi spasial dengan menggunakan metode SDEM. Model SDEM juga akan dibandingkan dengan model regresi berganda (OLS), SEM dan SCR. Sintaks yang digunakan adalah sebagai berikut:

Sintaks:

```
#BAB 6 SDEM
#PERSAMAAN REGRESI
reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN

#OLS
reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
summary(reg.OLS)

#SDM
reg.SDEM=errorsarlm(reg.eq,data=spJateng,
queen.jateng,etype="emixed")
summary(reg.SDEM)

#Perhitungan AIC
AIC(reg.SDEM)
AIC(reg.OLS)
#Perbandingan Model dengan OLS
```

```
LR.sarlm(reg.SDEM,reg.OLS) # SDEM vs OLS
LR.sarlm(reg.SDEM,reg.SAR) # SDEM vs SAR
LR.sarlm(reg.SDEM,reg.SLX) # SDEM vs SCR
```

Output:

```
> #PERSAMAAN REGRESI
> reg.eq=AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN
>
> #OLS
> reg.OLS=lm(reg.eq,data=spJateng)
> summary(reg.OLS)

Call:
lm(formula = reg.eq, data = spJateng)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.5502 -0.5978  0.2119  0.8688  1.7548

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.970e+01  3.141e+00  22.193   <2e-16 ***
RLS          7.170e-01  3.969e-01   1.807   0.0812 .
PHBSP        2.548e-02  3.019e-02   0.844   0.4056
PA           6.285e-04  4.993e-04   1.259   0.2182
MSKN        -1.805e-01  7.829e-02  -2.306   0.0285 *
PGLRN       -8.195e-05  2.523e-04  -0.325   0.7476
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘
’ 1

Residual standard error: 1.397 on 29 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5625,     Adjusted R-squared:  0.4
871
F-statistic: 7.457 on 5 and 29 DF,  p-value: 0.000133

>
> #SDEM
> reg.SDEM=errorsarlm(reg.eq,data=spJateng, queen.jateng,e
type="emixed")
> summary(reg.SDEM)

Call:errorsarlm(formula = reg.eq, data = spJateng, listw =
queen.jateng,     etype = "emixed")

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
```

```
-2.82407 -0.36270  0.13634  0.50299  1.17142

Type: error
Coefficients: (asymptotic standard errors)
               Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept) 69.66413791  3.24452585 21.4713 < 2.2e-16
RLS          0.98142411  0.30471060  3.2208 0.0012782
PHBSP        0.04996911  0.02124918  2.3516 0.0186939
PA           0.00045624  0.00035556  1.2832 0.1994388
MSKN        -0.15397348  0.05534369 -2.7821 0.0054003
PGLRN        0.00035676  0.00017079  2.0889 0.0367191
lag.RLS      0.36092172  0.48639525  0.7420 0.4580668
lag.PHBSP   -0.08521382  0.03531088 -2.4132 0.0158112
lag.PA       0.00230016  0.00067605  3.4023 0.0006681
lag.MSKN     0.02599129  0.11873102  0.2189 0.8267210
lag.PGLRN   -0.00067936  0.00036441 -1.8643 0.0622826

Lambda: -1.0102, LR test value: 11.278, p-value: 0.0007841
3
Asymptotic standard error: 0.18412
    z-value: -5.4864, p-value: 4.103e-08
Wald statistic: 30.1, p-value: 4.103e-08

Log likelihood: -44.06124 for error model
ML residual variance (sigma squared): 0.57604, (sigma: 0.7
5897)
Number of observations: 35
Number of parameters estimated: 13
AIC: 114.12, (AIC for lm: 123.4)

>
> #Perhitungan AIC
> AIC(reg.SDEM)
[1] 114.1225
> AIC(reg.OLS)
[1] 130.1694
> #Perbandingan Model dengan OLS
> LR.sarlm(reg.SDEM,reg.OLS) # SDEM vs OLS

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 28.047, df = 6, p-value = 9.207e-05
sample estimates:
Log likelihood of reg.SDEM  Log likelihood of reg.OLS
               -44.06124                  -58.08469

> LR.sarlm(reg.SDEM,reg.SAR) # SDEM vs SAR

        Likelihood ratio for spatial linear models
```

```
data:
Likelihood ratio = 21.49, df = 5, p-value = 0.0006544
sample estimates:
Log likelihood of reg.SDEM  Log likelihood of reg.SAR
                 -44.06124                  -54.80605

> LR.sarlm(reg.SDEM,reg.SLX) # SDEM vs SCR

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 11.278, df = 1, p-value = 0.0007841
sample estimates:
Log likelihood of reg.SDEM  Log likelihood of reg.SLX
                 -44.06124                  -49.70045
```

Berdasarkan output tersebut, diperoleh informasi bahwa:

- Model SDEM yang diperoleh dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\widehat{AHH}_i = 69{,}6641 + 0{,}9814 RLS_i + 0{,}0499 PHBSP_i + 0{,}0005 PA_i - 0{,}1540 MSKN_i + 0{,}0004 PGLRN_i + 0{,}3609 \sum_{j=1}^{n} w_{ij} RLS_j - 0{,}0852 \sum_{j=1}^{n} w_{ij} PHBSP_j + 0{,}0023 \sum_{j=1}^{n} w_{ij} PA_j + 0{,}0259 \sum_{j=1}^{n} w_{ij} MSKN_j - 6{,}7936 \text{x} 10^{-4} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} PGLRN_j + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = -1{,}0102 \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \varepsilon_j$$

- Nilai koefisien spasial lag ($\lambda = -1{,}0102$) artinya menunjukkan bahwa nilai error di suatu Kabupaten/Kota akan turun sebesar 1,0102 kali rata-rata error dari daerah yang menjadi tetangga/bersinggungan langsung dengan daerah tersebut, dengan asumsi variabel lain bersifat tetap.
- Nilai AIC dari model SDEM (114,1225) yang lebih kecil dari model OLS (130,1694). Dengan demikian, dapat dikatakan

bahwa model SDEM lebih baik/lebih sesuai untuk menggambarkan model Angka Harapan Hidup di Jawa Tengah.

- Bila dibandingkan dengan model OLS, model SDEM dapat dikatakan lebih baik karena nilai statistik Likelihood Ratio Test menunjukkan angka 28,047 dengan sig. 0,0000.
- Bila dibandingkan dengan model SEM, model SDEM dapat dikatakan juga lebih baik karena nilai statistik Likelihood Ratio Test menunjukkan angka 21,49 dengan sig. 0,0007.
- Bila dibandingkan dengan model SCR, model SDEM dapat dikatakan lebih baik karena nilai statistik Likelihood Ratio Test menunjukkan angka 11,278 dengan sig. 0,0008.

Contoh 6.2:

Perhatikan data pada Contoh 6.1, tidak semua variabel prediktor pada model SDEM tersebut signifikan terhadap responnya. Untuk memperbaikinya, salah satu caranya adalah dengan mengeluarkan beberapa variabel yang paling tidak signifikan (signifikansinya lemah) dari model tersebut.

Sintaks:

```
#Perbaikan model SDEM
#Mengambil Matriks Variabel Prediktor dari model OLS
X=model.matrix(reg.OLS)
#Membentuk matriks lag spasial
lagX = create_WX(X,queen.jateng,prefix = "lag")
spJateng2=cbind(spJateng,lagX)
#Membuat model SCR secara manual
reg.SDEM2=errorsarlm(AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN+l
ag.PHBSP+lag.PA+lag.PGLRN,queen.jateng,data=spJateng2)
summary(reg.SDEM2)
#AIC SDEM perbaikan
AIC(reg.SDEM2)
#Perbandingan Model dengan SDEM sebelumnya
LR.sarlm(reg.SDEM,reg.SDEM2)
```

Output:

```
> #Perbaikan model SDEM
> #Mengambil Matriks Variabel Prediktor dari model OLS
> X=model.matrix(reg.OLS)
> #Membentuk matriks lag spasial
> lagX = create_WX(X,queen.jateng,prefix = "lag")
> spJateng2=cbind(spJateng,lagX)
> #Membuat model SCR secara manual
> reg.SDEM2=errorsarlm(AHH~RLS+PHBSP+PA+MSKN+PGLRN+lag.PHB
SP+lag.PA+lag.PGLRN,queen.jateng,data=spJateng2)
> summary(reg.SDEM2)

Call:errorsarlm(formula = AHH ~ RLS + PHBSP + PA + MSKN +
PGLRN +
    lag.PHBSP + lag.PA + lag.PGLRN, data = spJateng2, list
w = queen.jateng)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.90497 -0.39756  0.14850  0.51431  1.19087

Type: error
Coefficients: (asymptotic standard errors)
               Estimate  Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept) 70.33722827  2.08883924 33.6729 < 2.2e-16
RLS          1.07391007  0.27912199  3.8475 0.0001193
PHBSP        0.04760179  0.02073060  2.2962 0.0216639
PA           0.00041664  0.00035031  1.1893 0.2343055
MSKN        -0.15304590  0.04174415 -3.6663 0.0002461
PGLRN        0.00029216  0.00015437  1.8927 0.0584043
lag.PHBSP   -0.08223704  0.03465126 -2.3733 0.0176310
lag.PA       0.00236139  0.00062723  3.7648 0.0001667
lag.PGLRN   -0.00045866  0.00021075 -2.1763 0.0295329

Lambda: -0.94028, LR test value: 10.903, p-value: 0.000959
93
Asymptotic standard error: 0.19434
    z-value: -4.8385, p-value: 1.3085e-06
Wald statistic: 23.411, p-value: 1.3085e-06

Log likelihood: -44.3052 for error model
ML residual variance (sigma squared): 0.60423, (sigma: 0.7
7732)
Number of observations: 35
Number of parameters estimated: 11
AIC: 110.61, (AIC for lm: 119.51)

> #AIC SDEM perbaikan
```

```
> AIC(reg.SDEM2)
[1] 110.6104
> #Perbandingan Model dengan SDEM sebelumnya
> LR.sarlm(reg.SDEM,reg.SDEM2)

        Likelihood ratio for spatial linear models

data:
Likelihood ratio = 0.48792, df = 2, p-value = 0.7835
sample estimates:
 Log likelihood of reg.SDEM Log likelihood of reg.SDEM2
                  -44.06124                   -44.30520
```

Untuk membentuk model SDEM baru, kita gunakan fungsi seperti pada model SEM tetapi dengan menambahkan lag spasial dari variabel prediktor dalam persamaan regresinya. Untuk membentuk model SDEM baru, kita lakukan dengan menghapus variabel yang paling tidak signifikan (Prob. Paling besar). Dengan mengeluarkan beberapa variabel diperoleh nilai AIC yang lebih kecil dari model SDEM sebelumnya. Sebagai latihan dapat dicoba untuk perbaikan dengan mengeluarkan variabel prediktor lainnya yang tidak signifikan.

BAB 7
ROBUST SPATIAL REGRESSION MODEL

7.1. Konsep Dasar Regresi Robust

Pencilan adalah pengamatan yang tampak berbeda dengan pengamatan lainnya pada sekumpulan data yang ada (Barnett dan Lewis, 1994). Menurut Draper dan Smith (1998), menolak begitu saja akan kehadiran pencilan bukan merupakan langkah yang bijaksana. Terkadang pencilan memberikan informasi yang tidak bisa diberikan oleh titik data lainnya. Sebab bila pencilan timbul bukan akibat dari kesalahan mencatat amatan atau kesalahan ketika menyiapkan peralatan, maka pencilan tidak dapat dihapuskan begitu saja dan penyelidikan yang seksama harus dilakukan. Terlebih dalam analisis spasial, menghilangkan begitu saja suatu pencilan dapat mengakibatkan perubahan komposisi efek spasial pada data.

Menurut Cohen (2003), pencilan dapat dideteksi dengan memeriksa data mentahnya secara visual atau dari diagram pencar pada variabel prediktor. Jika terdapat lebih dari dua variabel prediktor, beberapa pencilan akan sangat sulit untuk dideteksi dengan pemeriksaan visual. Oleh karena itu, dibutuhkan bantuan lain yang dapat membantu dalam pendeteksian pencilan. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mendeteksi pencilan pada data spasial adalah *Moran's Scatterplot.*

Menurut Shekhar, *et al.* (2003), *Moran's Scatterplot* adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk mendeteksi adanya pencilan spasial. *Moran's Scatterplot* merupakan grafik plot normal dengan nilai atribut $\left(Z \mid f(i) = \frac{f(i) - \mu_f}{\sigma_f}\right)$ yaitu rata-rata nilai ketetanggaan dari nilai atribut yang telah dinormalisasi. Grafik dibagi menjadi empat kuadran, plot data yang berada di kuadran bagian kiri atas dan kanan bawah mengindikasikan adanya autokorelasi spasial negatif yang menunjukkan bahwa daerah pengamatan rendah dikelilingi oleh daerah pengamatan tinggi maupun sebaliknya. Oleh karena itu, dapat diidentifikasi titik-titik yang berbeda dengan ketetanggaannya yang bernilai tinggi atau rendah, dan titik-titik tersebut dikategorikan sebagai pencilan spasial. Atau dapat dikatakan titik-titik data yang berada pada kuadran bagian kiri atas dan kanan bawah merupakan pencilan spasial.

Selain dilihat dari grafik, deteksi pencilan spasial menggunakan *Moran's Scatterplot* juga dapat diidentifikasi secara matematis menggunakan rumus di bawah ini:

$$\left(Z\left[f(i)\right] x \left(\sum_j \left(\mathbf{W}_{ij} \mathbf{Z}\left[f(j)\right]\right)\right)\right) \tag{7.1}$$

dengan $\mathbf{W}$ adalah matriks ketetanggaan, $Z_i = \frac{f(i) - \mu_f}{\sigma_f}$, $I_i = \left(\sum_j \left(\mathbf{W}_{ij} \mathbf{Z}\left[f(j)\right]\right)\right)$, μ_f dan σ_f adalah rata-rata dan standar deviasi dari fungsi f(i). Jika nilainya kurang dari 0 maka termasuk pencilan spasial, dan jika tidak maka sebaliknya.

Regresi Robust

Menurut Draper dan Smith (1998), regresi *robust* adalah metode regresi yang digunakan ketika residual tidak berdistribusi normal atau ada beberapa pencilan yang mempengaruhi model. Metode ini adalah alat yang penting untuk menganalisis data yang terkontaminasi oleh pencilan dan dapat memberikan hasil yang resisten akan kehadiran pencilan. Perhitungan regresi *robust* cukup sederhana tetapi untuk memperoleh dugaan terbaik perlu dilakukan perhitungan secara iteratif sehingga diperoleh nilai dugaan yang memiliki standar *error* parameter yang paling kecil. Salah satu metode estimasi dalam regresi *robust* adalah *Robust M-estimator.*

Robust M-Estimator

Robust M-estimator diperkenalkan oleh Huber (1973) dan merupakan metode yang paling sederhana baik secara komputasi dan secara teoritis. Menurut Draper dan Smith (1998), *M-estimator* sebenarnya meminimumkan fungsi obyektif:

$$min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i) = min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho(\frac{e_i}{s}) = min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{s}\right) \quad (7.2)$$

dengan s adalah skala estimasi robust. Estimasi s yang digunakan adalah:

$$s = \frac{MAD}{0,6745} = \frac{median\left|e_i - median\left(e_i\right)\right|}{0,6745} \quad (7.3)$$

Nilai 0,6745 menjadikan s sebagai estimator tak bias dari σ jika n besar dan error berdistribusi normal (Montgomery dan Peck, 1992). Untuk mendapatkan estimasi parameter $\beta_j \left(j = 0,1,\ldots,k \right)$ dengan meminimumkan persamaan (7.2) dan turunan parsial pertama dari ρ terhadap β_j disamakan dengan 0, sehingga:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\psi\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{s}\right) = 0,\ j = 0,1,\ldots,k \quad (7.4)$$

dengan $\psi = \rho'$ dan x_{ij} adalah pengamatan ke-*i* pada parameter ke-*j* dan $x_{i0} = 1$.

Draper dan Smith (1998) memberikan solusi pada persamaan (7.4) dengan mendefinisikan fungsi pembobot:

$$w(u_i) = \frac{\psi\left(\dfrac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{s}\right)}{\left(\dfrac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{s}\right)} \tag{7.5}$$

dan $w_i = w(u_i)$. Kemudian estimasi persamaan (7.4) dapat ditulis:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_i \left(y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j\right) = 0,\ j = 0,1,\ldots k \tag{7.6}$$

Persamaan (7.6) dapat diselesaikan dengan estimasi kuadrat terkecil dengan pembobot iteratif, yang dikenal dengan *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS). Iterasi ini membutuhkan proses iterasi dengan nilai w_i akan berubah nilainya di setiap iterasi. Pada IRLS ini diasumsikan bahwa $\hat{\beta}_0$ ada dan s adalah skala estimasi *robust*. Kemudian ditulis $p = k + 1$.

Estimasi β_j dapat diperoleh dengan persamaan :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_i \left(y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\hat{\beta}_j\right) = 0,\ \ j = 0,1,\ldots,k\ ;\ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_i \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\hat{\beta}_j = 0,\ j = 0,1,\ldots,k;\ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_i \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_i y_i,\ j = 0,1,\ldots,k;\ i = 1,2,\ldots,n$$

Pada notasi matriks, persamaan dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{y} \tag{7.7}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{y}$$

dengan $\boldsymbol{W}$ adalah matriks diagonal berukuran n x n dengan elemen-elemen diagonal $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Untuk estimasi, langkah pertama menggunakan metode kuadrat terkecil dengan bobot awal $\boldsymbol{W}^{(0)}$ yang diagonalnya $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 1$. Jadi estimasi parameter regresi *robust* dengan IRLS, untuk *m+1* iterasi:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = \left(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}^{(m)}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}^{(m)}\mathbf{y} \tag{7.8}$$

Iterasi akan berhenti sampai didapatkan nilai $\hat{\beta}_j$ yang konvergen yaitu selisih nilai $\hat{\beta}_j^{(m+1)}$ dan $\hat{\beta}_j^{(m)}$ mendekati 0.

Fungsi Obyektif

Fungsi yang digunakan untuk mencari fungsi pembobot pada regresi *robust* adalah fungsi obyektif (Fox, 2002). Salah satu fungsi pembobot yang dapat digunakan adalah fungsi pembobot *Tukey Bisquare* sebagai berikut:

$$w(u_i) = \begin{cases} \left[1-\left(\dfrac{u_i}{c}\right)^2\right]^2 & ,untuk\,|u_i| \le c \\ 0 & ,untuk\,|u_i| > c \end{cases} \tag{7.9}$$

Nilai c disebut *tunning constant.* Fox (2002) menyatakan bahwa *tunning constant* untuk fungsi pembobot *Tukey Bisquare* pada metode estimasi *M-estimator* adalah c = 4,685.

7.2. Robust Spatial Cross Regressive (RSCR)

Berikut adalah algoritma untuk menduga parameter model Robust SCR dengan menggunakan metode M-Estimator dengan fungsi obyektif *Tukey Bisquare*. Estimasi parameter diselesaikan dengan metode estimasi kuadrat terkecil pembobot iteratif yang dikenal dengan *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS).

Table 7.1. Algoritma Estimasi Parameter Robust SCR

Input:

Data Penelitian : $\{\boldsymbol{y};\boldsymbol{X}\}$

Matriks Pemobot Spasial ($\boldsymbol{W}$)

Output:

1. Inisialisasi parameter SCR dengan menggunakan metode Ordinary Least Square (OLS)

   $\boldsymbol{y} = \alpha + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}\mathbf{1}_n & \boldsymbol{X} & \boldsymbol{WX}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\theta}\end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(0)} = (\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{y}$$

2. **Ulangi**:

$$\boldsymbol{\delta}^{(t+1)} = \left(\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{B}^{(t)}\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{B}^{(t)}\boldsymbol{y}$$

Where: $\boldsymbol{B}^{(t)} = diag\left(b_1^{(t)}, b_2^{(t)}, \dots, b_n^{(t)}\right)$

$$b_i^{(t)} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{u_i^{(t)}}{4.685}\right)^2\right]^2 & , if\ \left|u_i^{(t)}\right| \le 4.685 \\ 0,\ if\ \left|u_i^{(t)}\right| > 4.685 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}^{(t)} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)}}{s}$$

$$s = \frac{median\left|\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)} - median\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)}\right)\right|}{0.6745}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)} = \boldsymbol{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}^{(t)}$$

3. **Sampai $\boldsymbol{\delta}$** Konvergens
4. **Simpan** $\begin{bmatrix}\alpha \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\theta}\end{bmatrix}$

Sintaks Fungsi Robust SCR dengan M-Estimator:

```
#Robust SCR M_EStimator
robust.SCR=function(X,y,bobot)
{
 n=length(y)
 k=ncol(X)
 bo=rep(1,n)
 X=cbind(bo,X)
 X=as.matrix(X)
 p=k+1
 c=4.685
 I=diag(rep(1,n))
 W=bobot
 W=as.matrix(W)
 V=I-W
```

```
#Step 1: Menghitung Nilai Delta
delta_awal=solve(crossprod(X,X),tol=1e-20)%*%t(X)%*%y
cat("Nilai delta awal=\n")
print(delta_awal)

#Step 2: Menghitung Residual
yhat=X%*%delta_awal
residual=y-yhat

#Step 3: Proses Iterasi
s=median(abs(residual-median(residual)))/0.6745
u=(residual/s)
u_absolut=abs(u)
w=rep(0,n)
for(j in 1:n){
 if (u_absolut[j]>c) {w[j]=0}
 else {w[j]=(1-(u[j]/c)^2)^2}
}
Wr=diag(w,n)
wjumlah=sum(diag(Wr))
WX=Wr%*%X
delta=solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr%*%y
a=0
#Iterasi Selanjutnya
repeat{
 con=abs(delta-delta_awal)/abs(delta)
 if(con[1,]<=0.01 && con[2,]<=0.01 && con[3,]<=0.01 &&
con[4,]<=0.01 && con[5,]<=0.01 && con[6,]<=0.01
    && con[7,]<=0.01 && con[8,]<=0.01 && con[9,]<=0.01 &&
con[10,]<=0.01) {
   cat("\n")
   cat("\n")
```

```
    cat("====================ITERASI
SELESAI================\n")
    break}
  else {
    a=a+1
    cat("\n")
    cat("\n")
    cat("******************ITERASI",a, "*******************\n")
    M<-matrix(c(residual,u_absolut,w),nrow=n)
    cat("\n-----------------------------------------\n")
    cat("  No      residual        |u|        w")
    cat("\n-----------------------------------------\n")
    print(M)

    #Step 4: Menghitung Nilai Delta Iterasi Selanjutnya
    cat("................................................\n")
    cat("Nilai delta=\n")
    print(delta)
    #Menghitung Nilai Prediksi dan Residual
    delta_awal=delta
    ytopi=X%*%delta_awal
    residual=y-ytopi

    s=median(abs(residual-median(residual)))/0.6745
    u=(residual/s)
    u_absolut=abs(u)
    w=rep(0,n)
    for(j in 1:n){
      if (u_absolut[j]>c) {w[j]=0}
      else {w[j]=(1-(u[j]/c)^2)^2}
    }
    Wr=diag(w,n)
    wjumlah=sum(diag(Wr))
    WX=Wr%*%X
```

```
    delta=solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr%*%y
  }
}

#Step 5: Menghitung MSE
v=rep(0,n)
for (i in 1:n) {
  if (w[i]==0) {v[i]=1}
  else {v[i]=0}
}
bobot_nol=sum(v)
H=X%*%solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr
SSE=t(y)%*%t(I-H)%*%Wr%*%(I-H)%*%y
db=n-k-1-bobot_nol
MSE=SSE/db
cat("..................................................\n")
cat("MSE\n")
print(MSE)

#Step 6: Menghitung Rsquare
SST=0
wy=0
for(i in 1:n){
  wy=wy+(w[i]*y[i])}
ywbar=wy/wjumlah
for(i in 1:n){
  SST=SST+(w[i]*(y[i]-ywbar)^2)
}
Rsquare=1-(SSE/SST)
cat("..................................................\n")
cat("Rsquare\n")
print(Rsquare)

#Step 7: Menghitung Adjusted Rsquare
```

```
  Adjusted_Rsquare=1-(((n-1)/(n-k-1))*(1-Rsquare))
  cat("..................................................\n")
  cat("Adjusted Rsquare\n")
  print(Adjusted_Rsquare)

  #Step 8: Uji Kecocokan Model
  SSR=SST-SSE
  MSR=SSR/k
  Fhit=MSR/MSE
  sig_F=1-pf(Fhit,k,db)
  F_hitung=cbind(Fhit,sig_F)
  colnames(F_hitung)=c("F_hit","sig")
  cat("..................................................\n")
  cat("F hitung\n")
  print(F_hitung)

  #Step 9: Uji Signifikansi Parameter
  Z=X
  WZ=Wr%*%Z
  var_delta=diag(solve(crossprod(Z,WZ),tol=1e-20))*MSE
  Zb=data.frame(t(delta_awal))
  par=t(Zb)
  wald=par^2/var_delta
  sig_wald=1-pchisq(wald,1)
  wald_hitung=cbind(par,var_delta,wald,sig_wald)
  colnames(wald_hitung)=c("delta","var_delta","Wald","Sig.")
  cat("..................................................\n")
  cat("Wald hitung\n")
  print(wald_hitung)

#Simpan Hasil
  return(list(Koefisien=par,Uji_Wald=wald_hitung,
            R.Square=Rsquare,Adj.RSq=Adjusted_Rsquare,
            Uji.F = F_hitung, MSE = MSE,
```

```
            Residuals=residual,Pred=y-residual))
}
```

7.3. Robust Spatial Autoregressive (RSAR)

Berikut adalah algoritma untuk menduga parameter model Robust SAR dengan menggunakan metode M-Estimator dengan fungsi obyektif *Tukey Bisquare*. Estimasi parameter diselesaikan dengan metode estimasi kuadrat terkecil pembobot iteratif yang dikenal dengan *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS).

Table 7.2. Algoritma Estimasi Parameter Robust SAR

Input:

Data Penelitian : $\{\boldsymbol{y}; \boldsymbol{X}\}$

Matriks Pembobot Spasial $(\boldsymbol{W})$

Koefisien Spatial lag dari model SAR (ρ)

Output:

1. Inisialisasi parameter SAR menggunakan metode Ordinary Least Square (OLS)

$$\boldsymbol{y} = \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \alpha + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{y} - \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = [\mathbf{1}_n \quad \boldsymbol{X}]\begin{bmatrix}\alpha \\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(0)} = (\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}$$

2. **Ulangi**:

$$\boldsymbol{\delta}^{(t+1)} = \left(\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{B}^{(t)}\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{B}^{(t)}(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y}$$

Where: $\boldsymbol{B}^{(t)} = diag\left(b_1^{(t)}, b_2^{(t)}, \dots, b_n^{(t)}\right)$

$$b_i^{(t)} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{u_i^{(t)}}{4.685}\right)^2\right]^2 & , if\ \left|u_i^{(t)}\right| \le 4.685 \\ 0,\ if\ \left|u_i^{(t)}\right| > 4.685 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}^{(t)} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)}}{s}$$

$$s = \frac{median\left|\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)} - median\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)}\right)\right|}{0.6745}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)} = (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}^{(t)}$$

3. **Sampai $\boldsymbol{\delta}$** Konvergens
4. **Simpan** $\begin{bmatrix}\alpha \\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$

Sintaks Fungsi Robust SAR dengan M-Estimator:

```
#Robust SAR M_EStimator
robust.SAR=function(X,y,bobot,rho)
{
 n=length(y)
 k=ncol(X)
 bo=rep(1,n)
 X=cbind(bo,X)
 X=as.matrix(X)
 p=k+1
 c=4.685
 I=diag(rep(1,n))
 W=rho*bobot
 W=as.matrix(W)
 V=I-W
 yb=V%*%y

 #Step 1: Menghitung Nilai Delta
 delta_awal=solve(crossprod(X,X),tol=1e-20)%*%t(X)%*%yb
 cat("Nilai delta awal=\n")
 print(delta_awal)

 #Step 2: Menghitung Residual
 yhat=W%*%y+X%*%delta_awal
 residual=y-yhat

 #Step 3: Proses Iterasi
 s=median(abs(residual-median(residual)))/0.6745
 u=(residual/s)
 u_absolut=abs(u)
 w=rep(0,n)
```

```
  for(j in 1:n){
   if (u_absolut[j]>c) {w[j]=0}
   else {w[j]=(1-(u[j]/c)^2)^2}
  }
  Wr=diag(w,n)
  wjumlah=sum(diag(Wr))
  WX=Wr%*%X
  delta=solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr%*%yb
  a=0
  #Iterasi Selanjutnya
  repeat{
   con=abs(delta-delta_awal)/abs(delta)
   if(con[1,]<=0.01    &&    con[2,]<=0.01    &&    con[3,]<=0.01    &&
con[4,]<=0.01 && con[5,]<=0.01 && con[6,]<=0.01) {
     cat("\n")
     cat("\n")
     cat("====================ITERASI
SELESAI================\n")
     break}
   else {
     a=a+1
     cat("\n")
     cat("\n")
     cat("********************ITERASI",a, "********************\n")
     M<-matrix(c(residual,u_absolut,w),nrow=n)
     cat("\n----------------------------------------\n")
     cat("  No      residual         |u|         w")
     cat("\n----------------------------------------\n")
     print(M)

     #Step 4: Menghitung Nilai Delta Iterasi Selanjutnya
     cat("..............................................\n")
     cat("Nilai delta=\n")
     print(delta)
```

```
    #Menghitung Nilai Prediksi dan Residual
    delta_awal=delta
    ytopi=W%*%y+X%*%delta_awal
    residual=y-ytopi

    s=median(abs(residual-median(residual)))/0.6745
    u=(residual/s)
    u_absolut=abs(u)
    w=rep(0,n)
    for(j in 1:n){
     if (u_absolut[j]>c) {w[j]=0}
     else {w[j]=(1-(u[j]/c)^2)^2}
    }
    Wr=diag(w,n)
    wjumlah=sum(diag(Wr))
    WX=Wr%*%X
    delta=solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr%*%yb
  }
}

#Step 5: Menghitung MSE
v=rep(0,n)
for (i in 1:n) {
 if (w[i]==0) {v[i]=1}
 else {v[i]=0}
}
bobot_nol=sum(v)
H=X%*%solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr
SSE=t(yb)%*%t(I-H)%*%Wr%*%(I-H)%*%yb
db=n-k-1-bobot_nol
MSE=SSE/db
cat("................................................\n")
cat("MSE\n")
print(MSE)
```

```
#Step 6: Menghitung Rsquare
SST=0
wy=0
for(i in 1:n){
  wy=wy+(w[i]*y[i])}
ywbar=wy/wjumlah
for(i in 1:n){
  SST=SST+(w[i]*(y[i]-ywbar)^2)
}
Rsquare=1-(SSE/SST)
cat("................................................\n")
cat("Rsquare\n")
print(Rsquare)

#Step 7: Menghitung Adjusted Rsquare
Adjusted_Rsquare=1-(((n-1)/(n-k-1))*(1-Rsquare))
cat("................................................\n")
cat("Adjusted Rsquare\n")
print(Adjusted_Rsquare)

#Step 8: Uji Kecocokan Model
SSR=SST-SSE
MSR=SSR/k
Fhit=MSR/MSE
sig_F=1-pf(Fhit,k,db)
F_hitung=cbind(Fhit,sig_F)
colnames(F_hitung)=c("F_hit","sig")
cat("................................................\n")
cat("F hitung\n")
print(F_hitung)


#Step 9: Uji Signifikansi Parameter
```

```
  Wy=bobot%*%y
  Z=cbind(Wy,X)
  WZ=Wr%*%Z
  var_delta=diag(solve(crossprod(Z,WZ),tol=1e-20))*MSE
  Zb=data.frame(rho,t(delta_awal))
  par=t(Zb)
  wald=par^2/var_delta
  sig_wald=1-pchisq(wald,1)
  wald_hitung=cbind(par,var_delta,wald,sig_wald)
  colnames(wald_hitung)=c("delta","var_delta","Wald","Sig.")
  cat("..................................................\n")
  cat("Wald hitung\n")
  print(wald_hitung)

#Simpan Hasil
  return(list(Koefisien=par,Uji_Wald=wald_hitung,
           R.Square=Rsquare,Adj.RSq=Adjusted_Rsquare,
           Uji.F = F_hitung, MSE = MSE,
           Residuals=residual,Pred=y-residual))
}
```

7.4. Robust Spatial Durbin Model (RSDM)

Berikut adalah algoritma untuk menduga parameter model Robust SDM dengan menggunakan metode M-Estimator dengan fungsi obyektif *Tukey Bisquare*. Estimasi parameter diselesaikan dengan metode estimasi kuadrat terkecil pembobot iteratif yang dikenal dengan *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS).

Table 7.3 Algoritma Estimasi Parameter Model Robust SDM

Input:

Data Penelitian : $\{\boldsymbol{y}; \boldsymbol{X}\}$

Matriks Pembobot Spasial $(\boldsymbol{W})$

Koefisien Spatial lag dari model SDM (ρ)

Output:

1. Inisialisasi parameter SDM menggunakan metode Ordinary Least Square (OLS)

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \alpha + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{y} - \rho \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{1}_n \quad \boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{W}\boldsymbol{X}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W})\boldsymbol{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(0)} = (\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W})\boldsymbol{y}$$

2. **Ulangi**:

$$\boldsymbol{\delta}^{(t+1)} = \left(\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{B}^{(t)}\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{B}^{(t)}(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W})\boldsymbol{y}$$

Where: $\boldsymbol{B}^{(t)} = diag\left(b_1^{(t)}, b_2^{(t)}, \dots, b_n^{(t)}\right)$

$$b_i^{(t)} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{u_i^{(t)}}{4.685}\right)^2\right]^2 & , if \left|u_i^{(t)}\right| \leq 4.685 \\ 0, \; if \left|u_i^{(t)}\right| > 4.685 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}^{(t)} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)}}{s}$$

$$s = \frac{median\left|\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)} - median\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)}\right)\right|}{0.6745}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(t)} = (\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W})\boldsymbol{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}^{(t)}$$

3. **Sampai $\boldsymbol{\delta}$** Convergence
4. **Simpan** $\begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$

Sintaks Fungsi Robust SDM dengan M-Estimator:

```
#Robust SDM M_EStimator
robust.SDM=function(X,y,bobot,rho)
{
  n=length(y)
  k=ncol(X)
  bo=rep(1,n)
  X=cbind(bo,X)
  X=as.matrix(X)
  p=k+1
  c=4.685
  I=diag(rep(1,n))
```

```
W=rho*bobot
W=as.matrix(W)
V=I-W
yb=V%*%y

#Step 1: Menghitung Nilai Delta
delta_awal=solve(crossprod(X,X),tol=1e-20)%*%t(X)%*%yb
cat("Nilai delta awal=\n")
print(delta_awal)

#Step 2: Menghitung Residual
yhat=W%*%y+X%*%delta_awal
residual=y-yhat

#Step 3: Proses Iterasi
s=median(abs(residual-median(residual)))/0.6745
u=(residual/s)
u_absolut=abs(u)
w=rep(0,n)
for(j in 1:n){
  if (u_absolut[j]>c) {w[j]=0}
  else {w[j]=(1-(u[j]/c)^2)^2}
}
Wr=diag(w,n)
wjumlah=sum(diag(Wr))
WX=Wr%*%X
delta=solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr%*%yb
a=0
#Iterasi Selanjutnya
repeat{
  con=abs(delta-delta_awal)/abs(delta)
  if(con[1,]<=0.01 && con[2,]<=0.01 && con[3,]<=0.01 &&
con[4,]<=0.01 && con[5,]<=0.01 && con[6,]<=0.01
```

```
     && con[7,]<=0.01 && con[8,]<=0.01 && con[9,]<=0.01 &&
con[10,]<=0.01) {
    cat("\n")
    cat("\n")
    cat("====================ITERASI
SELESAI================\n")
    break}
  else {
    a=a+1
    cat("\n")
    cat("\n")
    cat("********************ITERASI",a, "*********************\n")
    M<-matrix(c(residual,u_absolut,w),nrow=n)
    cat("\n------------------------------------------\n")
    cat("  No      residual          |u|          w")
    cat("\n------------------------------------------\n")
    print(M)

    #Step 4: Menghitung Nilai Delta Iterasi Selanjutnya
    cat("................................................\n")
    cat("Nilai delta=\n")
    print(delta)
    #Menghitung Nilai Prediksi dan Residual
    delta_awal=delta
    ytopi=W%*%y+X%*%delta_awal
    residual=y-ytopi

    s=median(abs(residual-median(residual)))/0.6745
    u=(residual/s)
    u_absolut=abs(u)
    w=rep(0,n)
    for(j in 1:n){
     if (u_absolut[j]>c) {w[j]=0}
     else {w[j]=(1-(u[j]/c)^2)^2}
```

```
    }
    Wr=diag(w,n)
    wjumlah=sum(diag(Wr))
    WX=Wr%*%X
    delta=solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr%*%yb
  }
}

#Step 5: Menghitung MSE
v=rep(0,n)
for (i in 1:n) {
  if (w[i]==0) {v[i]=1}
  else {v[i]=0}
}
bobot_nol=sum(v)
H=X%*%solve(crossprod(X,WX),tol=1e-20)%*%t(X)%*%Wr
SSE=t(yb)%*%t(I-H)%*%Wr%*%(I-H)%*%yb
db=n-k-1-bobot_nol
MSE=SSE/db
cat("..................................................\n")
cat("MSE\n")
print(MSE)

#Step 6: Menghitung Rsquare
SST=0
wy=0
for(i in 1:n){
  wy=wy+(w[i]*y[i])}
ywbar=wy/wjumlah
for(i in 1:n){
  SST=SST+(w[i]*(y[i]-ywbar)^2)
}
Rsquare=1-(SSE/SST)
cat("..................................................\n")
```

```
cat("Rsquare\n")
print(Rsquare)

#Step 7: Menghitung Adjusted Rsquare
Adjusted_Rsquare=1-(((n-1)/(n-k-1))*(1-Rsquare))
cat("..................................................\n")
cat("Adjusted Rsquare\n")
print(Adjusted_Rsquare)

#Step 8: Uji Kecocokan Model
SSR=SST-SSE
MSR=SSR/k
Fhit=MSR/MSE
sig_F=1-pf(Fhit,k,db)
F_hitung=cbind(Fhit,sig_F)
colnames(F_hitung)=c("F_hit","sig")
cat("..................................................\n")
cat("F hitung\n")
print(F_hitung)

#Step 9: Uji Signifikansi Parameter
Wy=bobot%*%y
Z=cbind(Wy,X)
WZ=Wr%*%Z
var_delta=diag(solve(crossprod(Z,WZ),tol=1e-20))*MSE
Zb=data.frame(rho,t(delta_awal))
par=t(Zb)
wald=par^2/var_delta
sig_wald=1-pchisq(wald,1)
wald_hitung=cbind(par,var_delta,wald,sig_wald)
colnames(wald_hitung)=c("delta","var_delta","Wald","Sig.")
cat("..................................................\n")
cat("Wald hitung\n")
print(wald_hitung)
```

```
#Simpan Hasil
 return(list(Koefisien=par,Uji_Wald=wald_hitung,
           R.Square=Rsquare,Adj.RSq=Adjusted_Rsquare,
           Uji.F = F_hitung, MSE = MSE,
           Residuals=residual,Pred=y-residual))
}
```

7.5. Aplikasi Regresi Spasial Robust dengan R

Pada penelitian ini, model Regresi Spasial Robust diaplikasikan pada kasus Angka Harapan Hidup (AHH) pada setiap kabupaten/kota Provinsi Jawa Tengah tahun 2017. Variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

AHH : Angka Harapan Hidup (Tahun)
RLS : Rata-rata lama sekolah (Tahun)
PHBSP : Persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat
PA : Jumlah Posyandu (Unit)
MSKN : Persentase penduduk miskin
PGLRN : Pengeluaran per kapita disesuaikan (Juta Rupiah)

Data secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 1. Berikut adalah deskripsi dari data tersebut:

Table 7.4. Statistik Deskriptif Variabel Penelitian

Statistics	**AHH** (Thn)	**RLS** (Thn)	**PHBSP** (%)	**PA** (Unit)	**MSKN** (%)	**PGLRN** (Juta Rupiah)
Min	68.61	6.18	59.69	164.00	4.62	7,785
1st Qu	73.42	6.71	71.60	600.00	9.33	9,238
Median	74.46	7.29	78.30	901.00	12.42	9,813
Mean	74.63	7.58	79.22	925.60	12.49	10,414
3rd Qu	75.90	8.26	88.06	1160.50	14.09	11,379
Max.	77.49	10.50	97.25	2195.00	20.32	14,921

Uji *Moran's I*

Untuk dapat melakukan identifikasi model regresi spasial salah satunya dapat dilakukan dengan uji autokorelasi spasial terhadap semua variabel penelitian. Pengujian dilakukan dengan menggunakan uji *Moran's I* untuk mendeteksi ada atau tidaknya autokorelasi spasial pada variabel respon maupun variabel prediktor. Pengujian dilakukan dengan *package spdep* pada *software R* dengan *output* yang dihasilkan tertera pada Bab 1. Untuk pembobotan dengan matriks pembobot *queen contiguity* uji *Moran's I* yang diperoleh disajikan dalam Tabel 7.5.

Hipotesis untuk uji autokorelasi spasial dengan uji *Moran's I* adalah sebagai berikut:

H_0: $I = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial antar lokasi)

H_1: $I \neq 0$ (ada autokorelasi spasial antar lokasi)

Table 7.5 Moran's I Test for detection spatial dependence

Variabel	*Moran's I*	Z-value	p-value
AHH	0.5752	-0.0294	0.0000*
RLS	0.4850	4.4498	0.0000*
PHBSP	0.3122	2.9544	0.0016*
PA	-0.0954	-0.5709	0.7160
MSKN	-0.3767	3.5126	0.0002*
PGLRN	0.4665	4.2892	0.0000*

Ket: * (Siginifikan pada level $\alpha = 5\%$)

H_0 ditolak jika nilai |Z-hitung| < $Z_{\alpha/2}$ = 1,96. Dari Tabel 7.5 dapat dilihat bahwa nilai |Z-hitung| dari variabel AHH, RLS, PHBSP, MSKN, dan PGLRN kurang dari $Z_{\alpha/2}$ = 1,96 , yang berarti H_0 ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat autokorelasi spasial antar lokasi baik pada variabel respon maupun variabel prediktor. Karena pada variabel respon dan minimal satu dari variabel prediktor menunjukkan adanya autokorelasi spasial antar lokasi, maka model SCR, SAR atau SDM dapat digunakan dalam penelitian ini.

Model Regresi Spasial

Berdasarkan sintaks pada Bab 1,2,3, dan 4 diperoleh hasil estimasi parameter model SCR, SAR dan SDM dari pemodelan Angka Harapan Hidup Jawa Tengah seperti pada Tabel 7.6.

Table 7.6. Parameter Model Regresi Spasial

Model	*Parameter*	*Coeff*	p-value	MSE	R^2
SCR	α	69.9357	0.0000*	1.4615	72.90%
	β_1	1.1180	0.0113*		
	β_2	0.0461	0.1220		
	β_3	0.0006	0.2549		
	β_4	-0.1708	0.0280*		
	β_5	0.0002	0.4987		
	θ_1	-0.2159	0.7926		
	θ_2	-0.0875	0.1532		
	θ_3	0.0027	0.0074*		
	θ_4	-0.0242	0.8785		
	θ_5	-0.0001	0.8363		
SAR	ρ	-0.5430	0.0105*	1.5198	65.95%
	α	109.7200	0.0000*		
	β_1	0.6666	0.0369*		
	β_2	0.0353	0.1525		
	β_3	0.0004	0.3691		
	β_4	-0.1941	0.0021*		
	β_5	0.0000	0.9644		
SDM*	ρ	-0.7343	0.0084*	1.0656	80.24%
	α	123.5800	0.0000*		
	β_1	0.8804	0.0026*		
	β_2	0.0354	0.0853		
	β_3	0.0006	0.0953		
	β_4	-0.1458	0.0048*		

β_5	0.0002	0.1354
θ_1	0.2686	0.6451
θ_2	-0.0631	0.1393
θ_3	0.0031	0.0000*
θ_4	-0.1775	0.1368
θ_5	-0.0002	0.5448

Ket: * (Siginifikan pada level α = 5%)

Berdasarkan Tabel 7.6 diperoleh bahwa model terbaik adalah model SDM karena memiliki MSE terkecil dan R^2 terbesar. Selanjutnya akan dilakukan pemodelan AHH dengan menggunakan Regresi Spasial Robust. Sebelumnya akan dilakukan deteksi outlier spasial dengan menggunakan Moran's Scatter Plot pada residual dari setiap model.

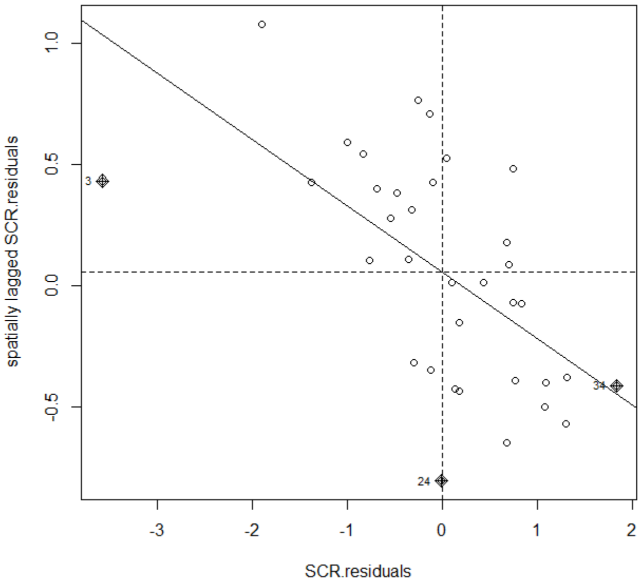
Pendeteksian Outlier Spasial

Pendeteksian pencilan yang dalam penelitian ini akan dideteksi pencilan spasial dilakukan dengan menggunakan uji *Moran's Scatterplot*. Untuk mendeteksinya dapat digunakan sintaks berikut:

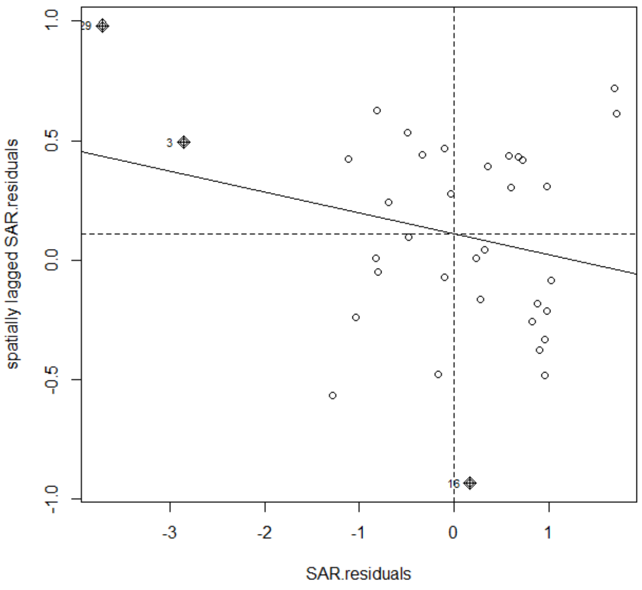
Sintaks:

```
#Deteksi outlier dengan Moran Scatterplot
SCR.residuals=reg.SLX$residuals
win.graph()
moran.plot(SCR.residuals,queen.jateng)
SAR.residuals=reg.SAR$residuals
win.graph()
moran.plot(SAR.residuals,queen.jateng)
SDM.residuals=reg.SDM$residuals
win.graph()
moran.plot(SDM.residuals,queen.jateng)
```

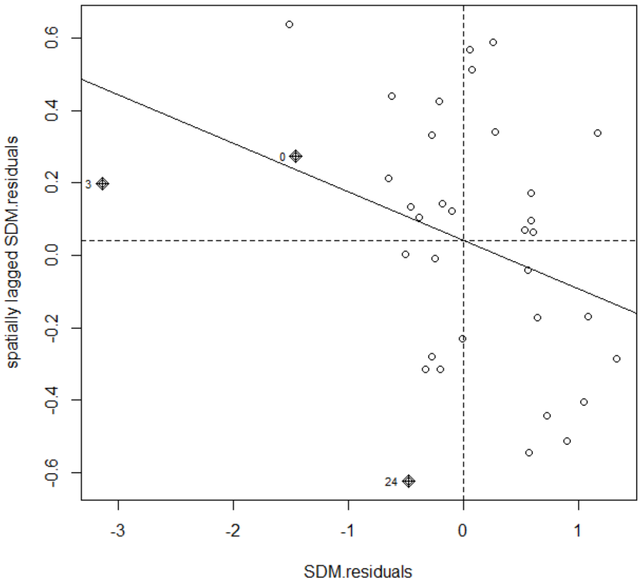
Output:



Gambar 7.1. Moran Scatter Plot Residual Model SCR



Gambar 7.2. Moran Scatter Plot Residual Model SAR



Gambar 7.3. Moran Scatter Plot Residual Model SDM

Gambar 7.1, 7.2, dan 7.3 memperlihatkan bahwa secara visual terdapat outlier spasial pada setiap residual model SCR, SAR, dan SDM. Terlihat masing-masing residual model mempunyai 3 pengamatan yang tidak wajar. Oleh karena itu diperlukan model regresi spasial yang robust yaitu dengan menggunakan RSCR, RSAR, dan RSDM.

Model Regresi Spasial Robust

Sintaks:

```
#Import data
mydata=read.csv("Data AHH Central Java.csv",header=T,sep=",")
y = mydata[,2]
X = mydata[,3:7]
#Memanggil Matriks Pembobot Queen
bobot.queen = listw2mat(queen.jateng) #convert listw to matrix

#Membentuk matriks lag spasial
```

```
lagX = create_WX(X,queen.jateng,prefix = "lag")
#Membentuk data baru
XJateng=cbind(X,lagX)

#Running Program Model Robust SCR
reg.RSCR=robust.SCR(XJateng,y,bobot.queen)

#Running Program Model Robust SAR
reg.RSAR=robust.SAR(XJateng,y,bobot.queen,reg.SAR$rho)

#Running Program Model Robust SDM
reg.RSDM=robust.SDM(XJateng,y,bobot.queen,reg.SDM$rho)
```

Output:

Model Robust SCR:

```
> #Running Program Model Robust SCR
> robust.SCR(XJateng,y,bobot.queen)
Nilai delta awal=
                   [,1]
bo        69.9357206669
RLS        1.1179949547
PHBSP      0.0461052774
PA         0.0006145798
MSKN      -0.1708287985
PGLRN      0.0001624604
lag.RLS   -0.2159116575
lag.PHBSP -0.0874988347
lag.PA     0.0027232974
lag.MSKN  -0.0241544785
lag.PGLRN -0.0001170284


********************ITERASI 1 ********************

-------------------------------------------
  No       residual          |u|          w
-------------------------------------------
             [,1]       [,2]      [,3]
 [1,] -1.38076602 1.46190233 0.8147440
 [2,]  1.29245878 1.36840600 0.8366539
 [3,]  1.06980290 1.13266645 0.8865163
 [4,] -3.57520488 3.78529039 0.1205488
 [5,]  0.67492777 0.71458775 0.9540124
 [6,]  0.73770219 0.78105091 0.9451859
 [7,] -0.30146799 0.31918279 0.9907385
```

```
 [8,]  1.08125796 1.14479464 0.8841482
 [9,] -0.99907905 1.05778674 0.9006440
[10,]  0.17317493 0.18335100 0.9969391
[11,]  0.69526219 0.73611705 0.9512348
[12,] -0.25913514 0.27436239 0.9931528
[13,]  0.83598048 0.88510421 0.9298901
[14,] -0.47553614 0.50347951 0.9770354
[15,]  1.30763474 1.38447373 0.8329714
[16,] -0.31965692 0.33844054 0.9895902
[17,]  0.17595278 0.18629209 0.9968402
[18,] -0.54432516 0.57631069 0.9699651
[19,]  0.10380242 0.10990204 0.9988997
[20,]  0.12997253 0.13760996 0.9982753
[21,] -0.83234139 0.88125127 0.9304882
[22,]  0.42705478 0.45214929 0.9814584
[23,] -0.35550555 0.37639570 0.9871324
[24,] -0.76686712 0.81192962 0.9408335
[25,] -0.01300965 0.01377413 0.9999827
[26,] -0.12136324 0.12849476 0.9984961
[27,]  0.04209018 0.04456348 0.9998191
[28,] -0.13314098 0.14096458 0.9981902
[29,] -0.68915556 0.72965158 0.9520772
[30,] -1.89765698 2.00916674 0.6659978
[31,]  0.67915510 0.71906348 0.9534414
[32,] -0.09534912 0.10095201 0.9990716
[33,]  0.76419656 0.80910214 0.9412386
[34,]  0.74295355 0.78661084 0.9444140
[35,]  1.82618105 1.93349075 0.6883693
....................................................
Nilai delta=
                      [,1]
bo          74.9809369836
RLS          0.8051752136
PHBSP        0.0528719984
PA           0.0007461972
MSKN        -0.2171419082
PGLRN        0.0001805074
lag.RLS     -0.3199624486
lag.PHBSP   -0.0991060373
lag.PA       0.0028748082
lag.MSKN    -0.1355756825
lag.PGLRN   -0.0001071272


*********************ITERASI 2 *********************

---------------------------------------------
  No       residual          |u|          w
---------------------------------------------
                [,1]        [,2]      [,3]
 [1,] -1.517584083 1.855806611 0.7108034
 [2,]  0.836727767 1.023208492 0.9068772
 [3,]  0.496297665 0.606907055 0.9667190
```

```
 [4,] -4.398960457 5.379352609 0.0000000
 [5,]  0.764838015 0.935296740 0.9218790
 [6,]  0.336654803 0.411684741 0.9846163
 [7,] -0.413291009 0.505400785 0.9768608
 [8,]  1.142149563 1.396699355 0.8301461
 [9,] -0.912815864 1.116254272 0.8896857
[10,]  0.442671900 0.541329767 0.9734768
[11,]  0.611936046 0.748317653 0.9496259
[12,] -0.489030413 0.598020158 0.9676786
[13,]  0.585123293 0.715529168 0.9538926
[14,] -0.739145516 0.903878177 0.9269413
[15,]  1.159705672 1.418168178 0.8251366
[16,] -0.604352611 0.739044105 0.9508511
[17,]  0.410217389 0.501642150 0.9772017
[18,] -0.467971901 0.572268356 0.9703818
[19,]  0.206356628 0.252347134 0.9942060
[20,] -0.164165994 0.200753514 0.9963311
[21,] -0.482971293 0.590610648 0.9684682
[22,]  0.411085589 0.502703844 0.9771057
[23,] -0.402011291 0.491607166 0.9780997
[24,] -0.859696706 1.051296497 0.9018281
[25,]  0.004344691 0.005312988 0.9999974
[26,] -0.488361307 0.597201929 0.9677663
[27,] -0.475854747 0.581908044 0.9693834
[28,] -0.170470430 0.208463013 0.9960442
[29,] -0.608916850 0.744625572 0.9501154
[30,] -1.387120452 1.696266674 0.7550048
[31,]  0.612270418 0.748726546 0.9495716
[32,] -0.108899830 0.133170233 0.9983847
[33,]  0.676497067 0.827267328 0.9386127
[34,]  0.704856990 0.861947800 0.9334482
[35,]  1.718161406 2.101086412 0.6381994
...................................................
Nilai delta=
                     [,1]
bo         76.6967122967
RLS         0.7362259356
PHBSP       0.0545504440
PA          0.0007961130
MSKN       -0.2279172052
PGLRN       0.0001844910
lag.RLS    -0.3056808350
lag.PHBSP  -0.1054423998
lag.PA      0.0030221131
lag.MSKN   -0.1830408759
lag.PGLRN  -0.0001477053


********************ITERASI 3 ********************

--------------------------------------------
  No       residual          |u|          w
--------------------------------------------
```

```
              [,1]       [,2]      [,3]
 [1,] -1.59393155 1.83413874 0.7169589
 [2,]  0.71468928 0.82239372 0.9393226
 [3,]  0.33353163 0.38379521 0.9866233
 [4,] -4.67363851 5.37796084 0.0000000
 [5,]  0.81179959 0.93413866 0.9220684
 [6,]  0.21929889 0.25234747 0.9942060
 [7,] -0.42154656 0.48507408 0.9786748
 [8,]  1.19094301 1.37041940 0.8361944
 [9,] -0.89431711 1.02909166 0.9058298
[10,]  0.53671984 0.61760409 0.9655459
[11,]  0.61454558 0.70715826 0.9549527
[12,] -0.52159722 0.60020248 0.9674442
[13,]  0.50454338 0.58057860 0.9695221
[14,] -0.85871491 0.98812417 0.9130108
[15,]  1.10833474 1.27536197 0.8572815
[16,] -0.66880162 0.76959074 0.9467608
[17,]  0.46513777 0.53523453 0.9740668
[18,] -0.41738551 0.48028596 0.9790915
[19,]  0.21656163 0.24919770 0.9943495
[20,] -0.22802347 0.26238685 0.9937366
[21,] -0.39709827 0.45694141 0.9810652
[22,]  0.39749616 0.45739926 0.9810274
[23,] -0.40102260 0.46145713 0.9806909
[24,] -0.92143859 1.06030037 0.9001837
[25,] -0.03522988 0.04053906 0.9998503
[26,] -0.58392968 0.67192851 0.9592838
[27,] -0.65033871 0.74834545 0.9496222
[28,] -0.19136669 0.22020585 0.9955864
[29,] -0.53124447 0.61130357 0.9662393
[30,] -1.09673230 1.26201103 0.8601419
[31,]  0.59492515 0.68458100 0.9577527
[32,] -0.12102663 0.13926547 0.9982335
[33,]  0.65928045 0.75863472 0.9482459
[34,]  0.67658580 0.77854800 0.9455318
[35,]  1.71283446 1.97096045 0.6773536
.....................................................
Nilai delta=
                     [,1]
bo        77.0731694205
RLS        0.7340014963
PHBSP      0.0544232672
PA         0.0008010356
MSKN      -0.2296290602
PGLRN      0.0001811979
lag.RLS   -0.2948910705
lag.PHBSP -0.1070604633
lag.PA     0.0030623813
lag.MSKN  -0.1940154675
lag.PGLRN -0.0001626030


====================ITERASI SELESAI================
```

```
...................................................
MSE
          [,1]
[1,] 0.6738521
...................................................
Rsquare
          [,1]
[1,] 0.8540939
...................................................
Adjusted Rsquare
          [,1]
[1,] 0.7932997
...................................................
F hitung
        F_hit          sig
[1,] 13.46356 2.165652e-07
...................................................
Wald hitung
                  delta    var_delta        Wald         Sig.
bo        77.0731694205 2.535300e+01 234.3026179 0.000000e+00
RLS        0.7340014963 8.578391e-02   6.2804106 1.220798e-02
PHBSP      0.0544232672 4.049575e-04   7.3140806 6.841639e-03
PA         0.0008010356 1.347546e-07   4.7616772 2.910018e-02
MSKN      -0.2296290602 2.887366e-03  18.2621474 1.924945e-05
PGLRN      0.0001811979 2.730385e-08   1.2024930 2.728240e-01
lag.RLS   -0.2948910705 3.235989e-01   0.2687300 6.041849e-01
lag.PHBSP -0.1070604633 1.713690e-03   6.6884565 9.703919e-03
lag.PA     0.0030623813 4.273485e-07  21.9450366 2.805716e-06
lag.MSKN  -0.1940154675 1.341762e-02   2.8054148 9.394654e-02
lag.PGLRN -0.0001626030 1.547427e-07   0.1708626 6.793463e-01
```

Model Robust SAR:

```
> #Running Program Model Robust SAR
> reg.RSAR=robust.SAR(XJateng,y,bobot.queen,reg.SAR$rho)
Nilai delta awal=
                   [,1]
bo         1.096025e+02
RLS        9.422713e-01
PHBSP      3.816711e-02
PA         6.238574e-04
MSKN      -1.523050e-01
PGLRN      2.271063e-04
lag.RLS    1.424026e-01
lag.PHBSP -6.943347e-02
lag.PA     2.967027e-03
lag.MSKN  -1.375337e-01
lag.PGLRN -2.079329e-04


*********************ITERASI 1 *********************
```

```
-------------------------------------------
  No       residual          |u|         w
-------------------------------------------
             [,1]       [,2]      [,3]
 [1,] -1.43493908 1.69648704 0.7549457
 [2,]  1.00006762 1.18235107 0.8766757
 [3,]  0.81269575 0.96082672 0.9176487
 [4,] -3.25038854 3.84284050 0.1070603
 [5,]  0.59925282 0.70847931 0.9547862
 [6,]  1.05345746 1.24547234 0.8636500
 [7,] -0.22567302 0.26680669 0.9935241
 [8,]  0.75437589 0.89187683 0.9288330
 [9,] -0.71957880 0.85073723 0.9351393
[10,] -0.13584231 0.16060244 0.9976511
[11,]  0.62807663 0.74255686 0.9503887
[12,] -0.02383123 0.02817498 0.9999277
[13,]  0.61267034 0.72434245 0.9527636
[14,] -0.32694876 0.38654207 0.9864318
[15,]  1.14127051 1.34929116 0.8409892
[16,] -0.21574222 0.25506580 0.9940807
[17,] -0.15830896 0.18716411 0.9968106
[18,] -0.42225306 0.49921759 0.9774203
[19,] -0.04492015 0.05310780 0.9997430
[20,]  0.03086352 0.03648905 0.9998787
[21,] -0.37423496 0.44244719 0.9822421
[22,]  0.54668088 0.64632502 0.9622984
[23,] -0.42906613 0.50727250 0.9766901
[24,] -0.56810243 0.67165110 0.9593171
[25,] -0.35711989 0.42221253 0.9838227
[26,] -0.27420662 0.32418657 0.9904466
[27,]  0.21207985 0.25073589 0.9942797
[28,]  0.02245888 0.02655249 0.9999358
[29,] -0.65889203 0.77898902 0.9454709
[30,] -1.61343202 1.90751408 0.6959331
[31,]  0.61301240 0.72474686 0.9527115
[32,]  0.16830542 0.19898264 0.9963955
[33,]  0.61562030 0.72783010 0.9523132
[34,]  0.96495666 1.14084039 0.8849227
[35,]  1.45763528 1.72332010 0.7476981
..................................................
Nilai delta=
                   [,1]
bo          1.146386e+02
RLS         6.412974e-01
PHBSP       4.417229e-02
PA          7.384123e-04
MSKN       -1.948551e-01
PGLRN       2.420728e-04
lag.RLS     2.938706e-02
lag.PHBSP -7.978344e-02
lag.PA      3.127736e-03
lag.MSKN   -2.513517e-01
lag.PGLRN -2.012391e-04
```

```
*********************ITERASI 2 *********************

-------------------------------------------------
  No       residual          |u|          w
-------------------------------------------------
             [,1]       [,2]      [,3]
 [1,] -1.59726418 1.93338544 0.6884001
 [2,]  0.55976740 0.67756240 0.9586054
 [3,]  0.25124691 0.30411821 0.9915903
 [4,] -4.05617144 4.90973436 0.0000000
 [5,]  0.68515009 0.82933007 0.9383111
 [6,]  0.67591266 0.81814876 0.9399377
 [7,] -0.32182432 0.38954762 0.9862207
 [8,]  0.79727562 0.96505080 0.9169388
 [9,] -0.63217876 0.76521168 0.9473568
[10,]  0.12497648 0.15127598 0.9979159
[11,]  0.52667360 0.63750449 0.9633108
[12,] -0.24116016 0.29190885 0.9922507
[13,]  0.37275923 0.45120104 0.9815357
[14,] -0.59054933 0.71482195 0.9539826
[15,]  0.99999784 1.21043300 0.8709524
[16,] -0.48113044 0.58237742 0.9693344
[17,]  0.06826901 0.08263524 0.9993779
[18,] -0.31618545 0.38272212 0.9866977
[19,]  0.06482368 0.07846489 0.9994391
[20,] -0.24081321 0.29148889 0.9922730
[21,] -0.04060787 0.04915321 0.9997799
[22,]  0.55816926 0.67562795 0.9588390
[23,] -0.47184738 0.57114088 0.9704976
[24,] -0.67497706 0.81701627 0.9401013
[25,] -0.34003155 0.41158630 0.9846236
[26,] -0.63184547 0.76480826 0.9474116
[27,] -0.31016885 0.37543942 0.9871975
[28,] -0.03056380 0.03699551 0.9998753
[29,] -0.57723028 0.69870008 0.9560119
[30,] -1.10823789 1.34145061 0.8427530
[31,]  0.56020390 0.67809075 0.9585415
[32,]  0.12948695 0.15673562 0.9977628
[33,]  0.53862521 0.65197114 0.9616432
[34,]  0.90419984 1.09447568 0.8938286
[35,]  1.33804298 1.61961487 0.7752626
...................................................
Nilai delta=
                    [,1]
bo          1.161789e+02
RLS         5.823092e-01
PHBSP       4.548796e-02
PA          7.673870e-04
MSKN       -2.031312e-01
PGLRN       2.458492e-04
lag.RLS     3.555870e-02
```

```
lag.PHBSP -8.583422e-02
lag.PA     3.253435e-03
lag.MSKN  -2.933440e-01
lag.PGLRN -2.308812e-04


********************ITERASI 3 ********************

------------------------------------------
  No       residual          |u|         w
------------------------------------------
             [,1]       [,2]      [,3]
 [1,] -1.67542370 2.21369117 0.6033219
 [2,]  0.45921466 0.60674768 0.9667364
 [3,]  0.12806777 0.16921241 0.9973927
 [4,] -4.28953850 5.66764905 0.0000000
 [5,]  0.72346078 0.95588880 0.9184751
 [6,]  0.56327515 0.74423993 0.9501664
 [7,] -0.32875560 0.43437571 0.9828813
 [8,]  0.81878351 1.08183609 0.8961999
 [9,] -0.62064918 0.82004666 0.9396630
[10,]  0.20356727 0.26896782 0.9934190
[11,]  0.50805877 0.67128405 0.9593611
[12,] -0.27503578 0.36339720 0.9880032
[13,]  0.29656878 0.39184815 0.9860580
[14,] -0.69283303 0.91542119 0.9250999
[15,]  0.94867262 1.25345500 0.8619617
[16,] -0.54820430 0.72432723 0.9527656
[17,]  0.10293990 0.13601166 0.9983151
[18,] -0.26987865 0.35658322 0.9884476
[19,]  0.06661734 0.08801965 0.9992942
[20,] -0.30373569 0.40131760 0.9853785
[21,]  0.02145652 0.02834991 0.9999268
[22,]  0.56074832 0.74090131 0.9506069
[23,] -0.47659243 0.62970844 0.9641946
[24,] -0.72883115 0.96298451 0.9172864
[25,] -0.37795948 0.49938745 0.9774050
[26,] -0.71489936 0.94457683 0.9203534
[27,] -0.46179768 0.61016055 0.9663643
[28,] -0.05285319 0.06983346 0.9995557
[29,] -0.50933099 0.67296501 0.9591594
[30,] -0.86796197 1.14681424 0.8837517
[31,]  0.54436426 0.71925350 0.9534171
[32,]  0.11314009 0.14948888 0.9979648
[33,]  0.53194926 0.70284991 0.9554937
[34,]  0.87621718 1.15772162 0.8815998
[35,]  1.32683367 1.75310877 0.7395609
..................................................
Nilai delta=
                   [,1]
bo         1.163614e+02
RLS        5.795544e-01
PHBSP      4.554162e-02
```

```
PA          7.657874e-04
MSKN       -2.002008e-01
PGLRN       2.519040e-04
lag.RLS     5.058327e-02
lag.PHBSP -8.703009e-02
lag.PA      3.299195e-03
lag.MSKN  -3.029712e-01
lag.PGLRN -2.508346e-04


===================ITERASI SELESAI===============
...................................................
MSE
          [,1]
[1,] 0.4825283
...................................................
Rsquare
          [,1]
[1,] 0.8942632
...................................................
Adjusted Rsquare
          [,1]
[1,] 0.8502063
...................................................
F hitung
        F_hit         sig
[1,] 19.45213 6.30586e-09
...................................................
Wald hitung
                  delta    var_delta        Wald         Sig.
rho       -5.430324e-01 9.029925e-02  3.26563254 7.074573e-02
bo         1.163614e+02 4.857807e+02 27.87258724 1.295726e-07
RLS        5.795544e-01 6.743354e-02  4.98095301 2.562786e-02
PHBSP      4.554162e-02 3.161887e-04  6.55949977 1.043257e-02
PA         7.657874e-04 9.666207e-08  6.06680987 1.377455e-02
MSKN      -2.002008e-01 2.310581e-03 17.34643328 3.114823e-05
PGLRN      2.519040e-04 2.098900e-08  3.02327943 8.207734e-02
lag.RLS    5.058327e-02 2.698913e-01  0.00948036 9.224348e-01
lag.PHBSP -8.703009e-02 1.356736e-03  5.58268966 1.813884e-02
lag.PA     3.299195e-03 3.211690e-07 33.89084829 5.829225e-09
lag.MSKN  -3.029712e-01 1.277995e-02  7.18247039 7.361927e-03
lag.PGLRN -2.508346e-04 1.124256e-07  0.55964149 4.544047e-01
```

Model Robust SDM:

```
> #Running Program Model Robust SDM
> reg.RSDM=robust.SDM(XJateng,y,bobot.queen,reg.SDM$rho)
Nilai delta awal=
                  [,1]
bo          1.235751e+02
RLS         8.803731e-01
PHBSP       3.537091e-02
```

```
PA         6.271254e-04
MSKN      -1.457800e-01
PGLRN      2.498777e-04
lag.RLS    2.686179e-01
lag.PHBSP -6.306999e-02
lag.PA     3.052881e-03
lag.MSKN  -1.774713e-01
lag.PGLRN -2.399537e-04


********************ITERASI 1 ********************

-------------------------------------------
  No       residual          |u|          w
-------------------------------------------
              [,1]        [,2]       [,3]
 [1,] -1.454021401 1.822737941 0.72017911
 [2,]  0.897073578 1.124557071 0.88808743
 [3,]  0.722130414 0.905251122 0.92672344
 [4,] -3.135972812 3.931205293 0.08755881
 [5,]  0.572596516 0.717797822 0.95360324
 [6,]  1.164681449 1.460026012 0.81519499
 [7,] -0.198974435 0.249431165 0.99433896
 [8,]  0.639232514 0.801331642 0.94234516
 [9,] -0.621125549 0.778633041 0.94552005
[10,] -0.244692837 0.306743022 0.99144484
[11,]  0.604410689 0.757679559 0.94837441
[12,]  0.059053966 0.074029106 0.99950070
[13,]  0.534009912 0.669426273 0.95958337
[14,] -0.274609229 0.344245731 0.98923104
[15,]  1.082669127 1.357216679 0.83919771
[16,] -0.179138537 0.224565202 0.99541017
[17,] -0.276051805 0.346054121 0.98911791
[18,] -0.379253468 0.475426073 0.97951033
[19,] -0.097307302 0.121982875 0.99864462
[20,] -0.004047377 0.005073727 0.99999765
[21,] -0.212868144 0.266848096 0.99352210
[22,]  0.588818870 0.738133906 0.95097053
[23,] -0.454977656 0.570352702 0.97057831
[24,] -0.498088081 0.624395241 0.96479084
[25,] -0.478331840 0.599629134 0.96750590
[26,] -0.328045314 0.411232352 0.98464998
[27,]  0.271958281 0.340922546 0.98943740
[28,]  0.077268532 0.096862594 0.99914527
[29,] -0.648231784 0.812612982 0.94073533
[30,] -1.513314498 1.897066818 0.69895773
[31,]  0.589713804 0.739255780 0.95082326
[32,]  0.261177064 0.327407385 0.99025625
[33,]  0.563284689 0.706124665 0.95508282
[34,]  1.043156687 1.307684517 0.85025210
[35,]  1.327815974 1.664528840 0.76347357
...................................................
Nilai delta=
```

```
                   [,1]
bo          1.286819e+02
RLS         5.844023e-01
PHBSP       4.117184e-02
PA          7.342863e-04
MSKN       -1.876673e-01
PGLRN       2.614356e-04
lag.RLS     1.538898e-01
lag.PHBSP  -7.307771e-02
lag.PA      3.221685e-03
lag.MSKN   -2.936848e-01
lag.PGLRN  -2.382056e-04


*********************ITERASI 2 *********************

--------------------------------------------
  No       residual          |u|          w
--------------------------------------------
              [,1]       [,2]      [,3]
 [1,] -1.62463522 2.27928757 0.5826429
 [2,]  0.45714453 0.64135249 0.9628708
 [3,]  0.15860940 0.22252160 0.9954932
 [4,] -3.94525942 5.53501527 0.0000000
 [5,]  0.65565935 0.91985954 0.9243862
 [6,]  0.79854186 1.12031705 0.8889049
 [7,] -0.28920295 0.40573827 0.9850559
 [8,]  0.68026126 0.95437487 0.9187276
 [9,] -0.53422634 0.74949468 0.9494694
[10,]  0.01533345 0.02151212 0.9999578
[11,]  0.49463874 0.69395512 0.9566007
[12,] -0.15605822 0.21894242 0.9956369
[13,]  0.29483025 0.41363311 0.9844709
[14,] -0.54415142 0.76341911 0.9475999
[15,]  0.93900094 1.31737460 0.8481162
[16,] -0.43762720 0.61397059 0.9659466
[17,] -0.04762647 0.06681772 0.9995932
[18,] -0.25864543 0.36286750 0.9880380
[19,]  0.01533302 0.02151151 0.9999578
[20,] -0.26890578 0.37726228 0.9870733
[21,]  0.11010189 0.15446783 0.9978270
[22,]  0.61304296 0.86007073 0.9337328
[23,] -0.49445749 0.69370083 0.9566321
[24,] -0.61000633 0.85581048 0.9343766
[25,] -0.46471157 0.65196869 0.9616435
[26,] -0.68966060 0.96756171 0.9165154
[27,] -0.25949804 0.36406366 0.9879593
[28,]  0.01386726 0.01945512 0.9999655
[29,] -0.56347089 0.79052342 0.9438676
[30,] -0.99683686 1.39851570 0.8297247
[31,]  0.54523095 0.76493363 0.9473946
[32,]  0.21183439 0.29719378 0.9919682
[33,]  0.48520799 0.68072422 0.9582223
```

```
[34,]  0.97601534 1.36930408 0.8364490
[35,]  1.20457802 1.68996688 0.7566948
.....................................................
Nilai delta=
                    [,1]
bo          1.300074e+02
RLS         5.315421e-01
PHBSP       4.243670e-02
PA          7.508707e-04
MSKN       -1.909947e-01
PGLRN       2.728194e-04
lag.RLS     1.652189e-01
lag.PHBSP -7.884822e-02
lag.PA      3.355588e-03
lag.MSKN  -3.335652e-01
lag.PGLRN -2.730405e-04


*********************ITERASI 3 *********************

--------------------------------------------
  No       residual          |u|          w
--------------------------------------------
               [,1]        [,2]      [,3]
 [1,] -1.734591101 2.38532092 0.5487498
 [2,]  0.376176940 0.51729928 0.9757652
 [3,]  0.071491571 0.09831155 0.9991195
 [4,] -4.144758727 5.69966011 0.0000000
 [5,]  0.706293154 0.97125820 0.9158903
 [6,]  0.673837858 0.92662734 0.9232917
 [7,] -0.281500110 0.38710455 0.9863924
 [8,]  0.679977060 0.93506966 0.9219161
 [9,] -0.523811686 0.72031903 0.9532806
[10,]  0.069853403 0.09605883 0.9991594
[11,]  0.472636641 0.64994572 0.9618789
[12,] -0.181925073 0.25017405 0.9943052
[13,]  0.230750628 0.31731646 0.9908463
[14,] -0.619520201 0.85193248 0.9349600
[15,]  0.905443409 1.24511944 0.8637245
[16,] -0.497107761 0.68359716 0.9578727
[17,] -0.032775867 0.04507170 0.9998149
[18,] -0.198954873 0.27359256 0.9931911
[19,]  0.007817776 0.01075061 0.9999895
[20,] -0.313159762 0.43064128 0.9831731
[21,]  0.167018827 0.22967575 0.9951991
[22,]  0.612834205 0.84273824 0.9363333
[23,] -0.504132315 0.69325696 0.9566870
[24,] -0.666562363 0.91662245 0.9249071
[25,] -0.511002176 0.70270404 0.9555120
[26,] -0.750688500 1.03230841 0.9052549
[27,] -0.409080602 0.56254671 0.9713723
[28,] -0.013639951 0.01875696 0.9999679
[29,] -0.500185774 0.68782988 0.9573551
```

```
[30,] -0.783001412 1.07674348 0.8971484
[31,]  0.518816371 0.71344973 0.9541571
[32,]  0.186257952 0.25613240 0.9940312
[33,]  0.487617587 0.67054675 0.9594494
[34,]  0.930355782 1.27937767 0.8564162
[35,]  1.190365701 1.63693000 0.7707453
..................................................
Nilai delta=
                   [,1]
bo          1.302215e+02
RLS         5.272142e-01
PHBSP       4.235044e-02
PA          7.501297e-04
MSKN       -1.893102e-01
PGLRN       2.769005e-04
lag.RLS     1.748930e-01
lag.PHBSP -7.993592e-02
lag.PA      3.388812e-03
lag.MSKN  -3.424023e-01
lag.PGLRN -2.869682e-04


*********************ITERASI 4 *********************

--------------------------------------------
  No       residual          |u|          w
--------------------------------------------
              [,1]        [,2]      [,3]
 [1,] -1.772261424 2.445352195 0.5293502
 [2,]  0.372449865 0.513903357 0.9760804
 [3,]  0.066684145 0.092010252 0.9992287
 [4,] -4.172948536 5.757801148 0.0000000
 [5,]  0.721572895 0.995620532 0.9117165
 [6,]  0.649637220 0.896364261 0.9281284
 [7,] -0.272989560 0.376668820 0.9871138
 [8,]  0.675303967 0.931779034 0.9224537
 [9,] -0.522779950 0.721327611 0.9531513
[10,]  0.070829587 0.097730100 0.9991299
[11,]  0.468501486 0.646434618 0.9622857
[12,] -0.180954197 0.249679160 0.9943277
[13,]  0.222022009 0.306344199 0.9914670
[14,] -0.636007688 0.877558342 0.9310592
[15,]  0.901377898 1.243714044 0.8640207
[16,] -0.505382813 0.697323180 0.9561831
[17,] -0.041428228 0.057162339 0.9997023
[18,] -0.182554371 0.251887067 0.9942271
[19,] -0.003794364 0.005235433 0.9999975
[20,] -0.316646013 0.436905647 0.9826822
[21,]  0.172611338 0.238167749 0.9948380
[22,]  0.612916649 0.845697510 0.9358928
[23,] -0.505685034 0.697740181 0.9561313
[24,] -0.684367508 0.944284836 0.9204016
[25,] -0.524204355 0.723292993 0.9528987
```

```
[26,] -0.750447585 1.035461600 0.9046897
[27,] -0.436958067 0.602911259 0.9671522
[28,] -0.020340299 0.028065382 0.9999282
[29,] -0.483983074 0.667795989 0.9597780
[30,] -0.740784562 1.022128637 0.9070689
[31,]  0.509157221 0.702531077 0.9555337
[32,]  0.178969792 0.246941093 0.9944513
[33,]  0.493525841 0.680963023 0.9581933
[34,]  0.906525609 1.250816813 0.8625207
[35,]  1.185673290 1.635982560 0.7709933
...................................................
Nilai delta=
                   [,1]
bo          1.302673e+02
RLS         5.260322e-01
PHBSP       4.225703e-02
PA          7.489208e-04
MSKN       -1.881266e-01
PGLRN       2.789743e-04
lag.RLS     1.776845e-01
lag.PHBSP -8.004997e-02
lag.PA      3.397831e-03
lag.MSKN  -3.450923e-01
lag.PGLRN -2.919272e-04


====================ITERASI SELESAI================
...................................................
MSE
          [,1]
[1,] 0.4437526
...................................................
Rsquare
          [,1]
[1,] 0.9025341
...................................................
Adjusted Rsquare
          [,1]
[1,] 0.8619233
...................................................
F hitung
        F_hit          sig
[1,] 21.29799 2.555648e-09
...................................................
Wald hitung
                  delta    var_delta       Wald         Sig.
rho       -7.343142e-01 8.282266e-02  6.5105042 1.072391e-02
bo         1.302673e+02 4.453259e+02 38.1059460 6.700562e-10
RLS        5.260322e-01 6.201179e-02  4.4622131 3.465257e-02
PHBSP      4.225703e-02 2.918186e-04  6.1190637 1.337316e-02
PA         7.489208e-04 8.906383e-08  6.2975330 1.209061e-02
MSKN      -1.881266e-01 2.143769e-03 16.5090567 4.841824e-05
PGLRN      2.789743e-04 1.938523e-08  4.0147388 4.510421e-02
```

```
lag.RLS    1.776845e-01 2.478721e-01  0.1273713 7.211733e-01
lag.PHBSP -8.004997e-02 1.250523e-03  5.1242526 2.359373e-02
lag.PA     3.397831e-03 2.956547e-07 39.0497944 4.131326e-10
lag.MSKN  -3.450923e-01 1.174754e-02 10.1373253 1.452968e-03
lag.PGLRN -2.919272e-04 1.032093e-07  0.8257149 3.635146e-01
```

Analisis:
Secara ringkas hasil estimasi parameter dari ketiga model tersebut dapat dilihat pada Tabel 7.7. Berdasarkan Tabel 7.7 terlihat bahwa model Robust SDM merupakan model terbaik dibandingkan dengan model Robust SCR maupun Robust SAR, karena model RSDM memiliki MSE terkecil dan R^2 terbesar. Selain itu model Regresi Spasial Robust mampu meningkatkan akurasi (R^2) model bila dibandingkan dengan model yang sebelumnya dengan peningkatan sedikitnya 10%. Pada model SCR, R^2 meningkat dari 72,90% menjadi 85,41%. Pada model SAR, dari 65,95% menjadi 75,57% dan pada model SDM dari 80,24% meningkat menjadi 90,25%.

Table 7.7. Parameter Model Regresi Spasial Robust

Model	*Parameter*	*Coeff*	p-value	MSE	R^2
RSCR	α	77.0732	0.0000*	0.6739	85.41%
	β_1	0.7340	0.0122*		
	β_2	0.0544	0.0068*		
	β_3	0.0008	0.0291*		
	β_4	-0.2296	0.0000*		
	β_5	0.0002	0.2728		
	θ_1	-0.2949	0.6042		
	θ_2	-0.1071	0.0097*		
	θ_3	0.0031	0.0000*		
	θ_4	-0.1940	0.0939		
	θ_5	-0.0002	0.6793		
RSAR	ρ	-0.5430	0.0026*	0.6449	75.57%
	α	110.7448	0.0000*		
	β_1	0.4289	0.0742		
	β_2	0.0310	0.0913		

	β_3	0.0004	0.2554		
	β_4	-0.1748	0.0004*		
	β_5	0.0001	0.5286		
RSDM*	ρ	-0.7343	0.0107*	0.4438	90.25%
	α	130.2673	0.0000*		
	β_1	0.5260	0.0347*		
	β_2	0.0423	0.0134*		
	β_3	0.0007	0.0121*		
	β_4	-0.1881	0.0000*		
	β_5	0.0003	0.0451*		
	θ_1	0.1777	0.7212		
	θ_2	-0.0800	0.0236*		
	θ_3	0.0034	0.0000*		
	θ_4	-0.3451	0.0015*		
	θ_5	-0.0003	0.3635		

Ket: * (Siginifikan pada level α = 5%)

Interpretasi Model Terbaik

Berdasarkan hasil pengujian yang telah dilakukan, model regresi *spatial* terbaik untuk memodelkan kasus angka harapan hidup di Provinsi Jawa Tengah pada tahun 2017 adalah regresi *Robust Spatial Durbin Model*. Model yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\widehat{AHH}_i =& -0{,}7343\sum_{j=1}^{n} w_{ij}AHH_j + 130{,}2673 + 0{,}5260RLS_i \\ &+0{,}0423PHBSP_i + 0{,}0007PA_i - 0{,}1881MSKN_i \\ &+0{,}0003PGLRN_i + 0{,}1777\sum_{j=1}^{n} w_{ij}RLS_j \\ &- 0{,}0800\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PHBSP_j + 0{,}0034\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PA_j \\ &- 0{,}3451\sum_{j=1}^{n} w_{ij}MSKN_j - 0{,}0003\sum_{j=1}^{n} w_{ij}PGLRN_j\end{aligned}$$

Model di atas dapat dijelaskan seperti berikut:

1. Meningkatnya 1 tahun rata-rata lama sekolah, maka Angka Harapan Hidup meningkat sebesar 0,5620 dengan asumsi variabel lain tetap.
2. Meningkatnya 1% rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat, maka Angka Harapan Hidup meningkat sebesar 0,0423 dengan asumsi variabel lain tetap.
3. Meningkatnya 1 posyandu, maka Angka Harapan Hidup meningkat sebesar 0,0007 dengan asumsi variabel lain tetap.
4. Meningkatnya 1% kemiskinan, maka Angka Harapan Hidup menurun sebesar 0,1881 dengan asumsi variabel lain tetap.
5. Meningkatnya 1000 pengeluaran per kapita disesuaikan, maka Angka Harapan Hidup menurun sebesar 0,0003 dengan asumsi variabel lain tetap.
6. Nilai koefisien lag spasial dari variabel AHH *(ρ)* sebesar (-0,7343) artinya AHH masing-masing kabupaten/kota akan mendapat pengaruh sebesar (-0,7343) dikali rata-rata nilai AHH tiap kabupaten/kota yang menjadi tetangga.
7. Nilai koefisien lag spasial dari variabel RLS $\left(\theta_1\right)$ sebesar 0,1777 artinya rata-rata lama sekolah masing-masing kabupaten/kota akan mendapat pengaruh sebesar 0,1777 dikali rata-rata lama sekolah tiap kabupaten/kota yang menjadi tetangga.
8. Nilai koefisien lag spasial dari variabel PHBSP $\left(\theta_2\right)$ sebesar (-0,0800) artinya persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat masing-masing kabupaten/kota akan mendapat pengaruh sebesar (-0,0800) dikali rata-rata persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat tiap kabupaten/kota yang menjadi tetangga.
9. Nilai koefisien lag spasial dari variabel PA $\left(\theta_3\right)$ sebesar 0,0034 artinya banyaknya posyandu masing-masing kabupaten/kota akan mendapat pengaruh sebesar 0,0034 dikali rata-rata

banyaknya posyandu tiap kabupaten/kota yang menjadi tetangga.

10. Nilai koefisien lag spasial dari variabel MSKN $\left(\theta_4\right)$ sebesar (-0,3451) artinya persentase kemiskinan masing-masing kabupaten/kota akan mendapat pengaruh sebesar (-0,3451) dikali rata-rata persentase kemiskinan tiap kabupaten/kota yang menjadi tetangga.
11. Nilai koefisien lag spasial dari variabel PGLRN $\left(\theta_5\right)$ sebesar (-0,0003) artinya pengeluaran per kapita disesuaikan masing-masing kabupaten/kota akan mendapat pengaruh sebesar (-0,0003) dikali rata-rata pengeluaran per kapita disesuaikan tiap kabupaten/kota yang menjadi tetangga.

DAFTAR PUSTAKA

[1] (Badan Pusat Statistika Provinsi Jawa Tengah), Provinsi Jawa Tengah Dalam Angka (Jawa Tengah Province in Figures) 2018. Semarang: Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Tengah, 2018.

[2] Douglas C. Montgomery and G. C. Runger, Applied Statistics and Probability for Engineers, vol. 30, no. 1. Wiley, 1998.

[3] S. F. Higazi, D. H. Abdel-Hady, and S. A. Al-Oulfi, "Application of spatial regression models to income poverty ratios in middle delta contiguous counties in egypt," Pakistan J. Stat. Oper. Res., vol. 9, no. 1, pp. 93–110, 2013.

[4] A. Karim, A. Faturohman, S. Suhartono, D. D. Prastyo, and B. Manfaat, "Regression Models for Spatial Data: An Example from Gross Domestic Regional Bruto in Province Central Java," J. Ekon. Pembang. Kaji. Masal. Ekon. dan Pembang., vol. 18, no. 2, p. 213, 2017.

[5] L. Anselin, "SPATIAL DATA ANALYSIS WITH GIS : AN INTRODUCTION TO APPLICATION IN THE SOCIAL SCIENCES Technical Report 92-10," 1992.

[6] S. Shekhar, C. T. Lu, and P. Zhang, "A Unified Approach to Detecting Spatial Outliers," Geoinformatica, vol. 7, no. 2, pp. 139–166, 2003.

[7] A. Setiawan, M. Kom, J. Burch, and G. Grudnitski, "KAJIAN REGRESI KEKAR MENGGUNAKAN METODE PENDUGA-MM DAN KUADRAT MEDIAN TERKECIL," vol. IX, no. Tahap II, pp. 1–21, 2015.

[8] C. Chen, “Statistics and Data Analysis Paper 265-27 Robust Regression and Outlier Detection with the ROBUSTREG Procedure,” Statistics (Ber)., 2002.

[9] Q. Cai, H. He, and H. Man, “Spatial outlier detection based on iterative self-organizing learning model,” Neurocomputing, vol. 117, pp. 161–172, 2013.

[10] (Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah), Profil Kesehatan Provinsi Jawa Tengah 2017, vol. 3511351, no. 24. Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah, 2017.

[11] M. F. Goodchild, Spatial Autocorrelation. Norwich: Geo Books, Norwich, 1989.

[12] T. Wuryandari, A. Hoyyi, D. S. Kusumawardani, and D. Rahmawati, “Identifikasi Autokorelasi Spasial Pada Jumlahpengangguran Di Jawa Tengah Menggunakan Indeks Moran,” Media Stat., vol. 7, no. 1, pp. 1–10, 2014.

[13] H. Yasin and R. Saputra, “Pemetaan Penyakit Demam Berdarah Dengue Dengan Analisis Pola Spasial Di Kabupaten Pekalongan,” Media Stat., vol. 6, no. 1, pp. 27–36, 2013.

[14] L. Anselin, Spatial Econometrics: Methods and Models. Kluwer Academic Publishers, 1988.

[15] J. P. LeSage and R. K. Pace, Introduction to spatial econometrics. New York: Taylor & Francis Group, 2009.

[16] J. P. LeSage, The Theory and Practice of Spatial Econometrics. New York: University of Toledo, 1999.

[17] N. R. Draper and H. Smith, Applied Regression Analysis. New York: John Wiley and Sons, 1998.

[18] J. Nahar and S. Purwani, “Application of Robust M-Estimator Regression in Handling Data Outliers,” in 4th ICRIEMS Proceedings, 2017, pp. 53–60.

[19] J. Fox and S. Weisberg, An R Companion to Applied Regression, 3rd ed. California: SAGE Publications, 2018.

[20] P. M. Robinson and S. Thawornkaiwong, “Statistical inference on regression with spatial dependence,” J. Econom., vol. 167, no. 2, pp. 521–542, 2012.

[21] R. Bivand and G. Piras, “Comparing Implementations of Estimation Methods for Spatial Econometrics,” J. Stat. Softw., vol. 63, no. 18, pp. 1–36, 2015.

[22] R. Bivand, “spdep: Spatial Dependence: Weighting Schemes, Statistics,” R package version 1.1-5. 2020.

[23] R. Bivand, “spatialreg: Spatial Regression Analysis,” R package version 1.1-5. 2019.

Lampiran 1. Data Penelitian

Data Angka Harapan Hidup (AHH) dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya pada 35 kabupaten/kota di Provinsi Jawa Tengah tahun 2017

No	AHH (tahun)	RLS (tahun)	PHBS (%)	Posyandu (unit)	Penduduk Miskin (%)	Pengeluaran Per Kapita Disesuaikan (Ribu Rupiah)
1	71.30	6.51	76.49	824	20.32	9969
2	76.00	6.68	89.31	1364	12.90	8765
3	75.42	6.90	79.42	2102	11.46	8794
4	71.14	6.55	81.41	1197	9.90	9136
5	77.49	8.71	73.93	1085	8.75	10765
6	75.55	7.04	87.78	839	14.02	12041
7	75.57	7.87	68.61	1074	7.78	11389
8	74.32	6.94	76.19	572	18.35	9736
9	74.26	7.69	76.56	1111	13.81	9601
10	72.91	6.87	76.66	1137	18.80	9340
11	72.98	6.31	72.26	356	17.37	7785
12	73.46	6.73	75.50	901	12.61	9702
13	75.80	7.08	69.01	970	11.38	9813
14	73.39	7.41	59.69	1608	12.42	8627
15	76.44	8.31	78.30	400	7.59	10639
16	74.23	8.29	90.41	173	8.11	12283
17	77.06	10.38	94.71	588	10.65	13986
18	77.21	10.50	92.29	1219	4.62	14334
19	76.98	10.15	86.17	216	5.07	14921
20	74.19	8.56	92.66	322	7.47	11800
21	76.66	10.30	97.25	164	8.75	11525
22	76.62	8.23	92.83	2195	14.15	11369
23	74.24	6.85	64.18	637	11.10	10863
24	72.98	7.29	78.32	1873	19.60	8446
25	77.31	8.50	88.35	985	12.28	10933

26	75.68	7.33	83.67	665	8.12	9745
27	74.46	6.66	89.22	761	13.27	9716
28	75.27	7.47	81.41	764	13.41	9544
29	73.24	6.91	74.56	1143	13.94	9896
30	68.61	6.18	66.01	857	19.14	9554
31	75.72	7.44	68.17	1232	11.96	12262
32	73.99	6.45	68.36	221	13.04	9065
33	74.50	6.61	83.68	612	10.80	8805
34	73.33	7.40	70.94	1178	17.05	10713
35	73.79	6.27	68.47	1052	17.21	8630

Daftar Nama Kabupaten/Kota di Jawa Tengah:

No	Kabupaten/Kota	No	Kabupaten/Kota
1	Wonosobo	19	Kota Salatiga
2	Wonogiri	20	Kota Pekalongan
3	Temanggung	21	Kota Magelang
4	Tegal	22	Klaten
5	Sukoharjo	23	Kendal
6	Sragen	24	Kebumen
7	Semarang	25	Karanganyar
8	Rembang	26	Jepara
9	Purworejo	27	Grobogan
10	Purbalingga	28	Demak
11	Pemalang	29	Cilacap
12	Pekalongan	30	Brebes
13	Pati	31	Boyolali
14	Magelang	32	Blora
15	Kudus	33	Batang
16	Kota Tegal	34	Banyumas
17	Kota Surakarta	35	Banjarnegara
18	Kota Semarang		

BIOGRAFI PENULIS

Hasbi Yasin, S.Si., M.Si. lahir di Pekalongan, Jawa Tengah pada 17 Desember 1982. Menyelesaikan program sarjana di Matematika FMIPA Universitas Diponegoro pada tahun 2005 Magister Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya pada tahun 2011 dan mendapatkan penghargaan sebagai wisudawan terbaik. Hasbi Yasin merupakan Dosen di Departemen Statistika FSM UNDIP dengan bidang keahlian Statistika Spasial dan Komputasi Statistika. Ia juga mengampu mata kuliah Teknik Simulasi, Metode Numerik dan Teori Antrian. Selama menjadi tenaga pendidik Ia aktif melakukan penelitian antara lain didanai oleh Dana Swakelola BKP Provinsi Jawa Tengah (2012), DIPA PNBP FMIPA Undip (2012-sekarang), Penelitian Fundamental DIKTI, Penelitian Hibah Bersaing DIKTI, Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi (PDUPT), Penelitian Terapan Unggulan Perguruan Tinggi (PTUPT). Hasbi sudah menerbitkan buku dengan judul "Geographically Weighted Regression (GWR): Sebuah Kajian Regresi Geografis" dan buku berjudul "Spatial Data Panel". Buku ke-3 ini masih tentang Statistika Spasial berjudul "Regresi Spasial: Aplikasi dengan R" yang merupakan hasil luaran penelitian PDUPT Tahun 2020. Hasbi juga telah mempublikasikan karya ilmiah di jurnal nasional terakreditasi SINTA S2 dan beberapa jurnal internasional bereputasi terindeks Scopus. Selain itu, Hasbi juga telah mempunyai beberapa sertifikat HKI atas karya ciptaannya. Pembaca dapat melihat profil pribadi penulis di Scopus: (id= 54915555400), Orcid id: https://orcid.org/0000-0002-4887-9646 atau di SINTA: (id=5974834).

Dr. Budi Warsito, S.Si., M.Si. lahir di Sukoharjo, Jawa Tengah 24 Agustus 1975. Menyelesaikan pendidikan S1, S2, dan S3 di Program Studi Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada. Ia merupakan Dosen di Departemen Statistika FSM UNDIP dengan bidang keahlian Time Series dan Neural Network. Selama menjadi tenaga pendidik Ia aktif melakukan penelitian yang didanai oleh DIPA PNBP FMIPA Undip, LPPM Undip, dan DRPM Kemenristek Dikti/BRIN. Ia juga telah mempublikasikan karya ilmiah di jurnal nasional terakreditasi SINTA S2 dan beberapa jurnal internasional bereputasi terindeks Scopus. Selain itu, Ia juga telah mempunyai beberapa sertifikat HKI atas karya ciptaannya. Pembaca dapat melihat profil pribadi penulis di Scopus: (id= 57188561936), atau di SINTA: (id= 5974829).

Arief Rachman Hakim, S.Si., M.Si. lahir di Lampung, 30 Juli 1993. Menyelesaikan program sarjana di Departemen Statistika FSM Universitas Diponegoro pada tahun 2014, Magister Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya pada tahun 2016. Ia merupakan Dosen di Departemen Statistika FSM UNDIP dengan bidang keahlian Time Series dan Neural Network. Selama menjadi tenaga pendidik Ia aktif melakukan penelitian yang didanai oleh DIPA PNBP FMIPA Undip, LPPM Undip, dan DRPM Kemenristek Dikti/BRIN. Ia juga telah mempublikasikan karya ilmiah di jurnal nasional terakreditasi SINTA S2 dan beberapa jurnal internasional bereputasi terindeks Scopus. Selain itu, Ia juga telah mempunyai beberapa sertifikat HKI atas karya ciptaannya. Pembaca dapat melihat profil pribadi penulis di Scopus: (id= 57197732882), atau di SINTA: (id= 6670645).