

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diuraikan tentang teori *Analityc Hierarchy Process* (AHP), teori *Trapezoidal Fuzzy* dan *Multi Criteria Decision Making* (MCDM).

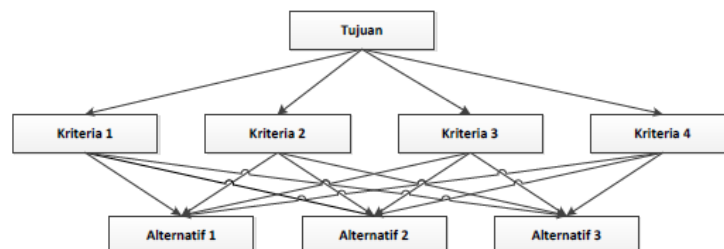
2.1 *Analytic Hierarchy Process* (AHP)

Metode AHP dikembangkan pada awal tahun 1970-an oleh Thomas L. Saaty, seorang ahli matematika dari Universitas Pittsburg [10]. Metode AHP merupakan suatu proses untuk memperoleh solusi terbaik dengan cara mendekomposisi permasalahan yang kompleks dan tidak terstruktur kedalam bentuk yang lebih sederhana, kemudian melakukan sintesis terhadap faktor yang terlibat pada permasalahan pengambilan keputusan tersebut [11].

AHP merupakan suatu model pengambil keputusan yang komprehensif dengan mempertimbangkan aspek kualitatif dan kuantitatif dari suatu keputusan [12] serta mengurangi kompleksitas suatu keputusan dengan membuat perbandingan berpasangan sehingga didapatkan skala kepentingan relatif [13]. AHP membantu para pengambil keputusan untuk memperoleh alternatif solusi terbaik serta memberikan pemahaman rasional yang jelas untuk pilihan yang diambil.

Menurut [14], terdapat empat prinsip dasar AHP dalam menyelesaikan permasalahan dengan metode AHP, yaitu sebagai berikut:

1. *Decomposition*, yaitu memecah permasalahan kompleks kedalam bentuk yang lebih sederhana, disusun secara hierarki serta menggabungkannya.



Gambar 2. 1 Struktur Hierarki

2. *Comparative Judgment*, yaitu suatu proses penilaian mengenai kepentingan relatif antar kriteria pada tingkat tertentu yang berpengaruh

pada prioritas kriteria. Hasil penilaian ini disajikan dalam bentuk matriks perbandingan berpasangan. Matriks perbandingan berpasangan menggunakan skala preferensi bernilai 1-9, yang memuat tingkat preferensi beberapa alternatif untuk setiap kriteria. Skala perbandingan berpasangan [15] ditunjukkan pada Tabel 2.1 yaitu sebagai berikut:

Tabel 2. 1 Skala Perbandingan Berpasangan

Tingkat Kepentingan	Definisi
1	Sama penting
3	Elemen yang satu sedikit lebih penting
5	Elemen yang satu lebih penting
7	Elemen yang satu sangat lebih penting
9	Elemen yang satu mutlak lebih penting
2, 4, 6, 8	Nilai-nilai kompromi antara dua pertimbangan/penilaian yang berdekatan

3. *Synthesis Of Priority*, yaitu suatu proses sintesis diantara *local priority* pada setiap tingkat hierarki dengan mencari *eigen vector* setiap matriks perbandingan berpasangan, sehingga diperoleh *global priority* dari beragam kriteria suatu pengambilan keputusan.
4. *Logical Consistency*, konsistensi memiliki dua makna, pertama yaitu mengelompokkan objek-objek berdasarkan keseragaman dan relevansi. Kedua, berkaitan dengan tingkat hubungan antara objek-objek berdasarkan kriteria tertentu. penilaian kepentingan relatif yang konsisten dari setiap kriteria.

Metode AHP memiliki empat aksioma [16], yaitu sebagai berikut:

1. *Reciprocal Comparison*, artinya pengambil keputusan membuat perbandingan berpasangan dan menyatakan preferensinya. Preferensi tersebut harus memenuhi syarat resiprokal, yaitu jika i dinilai 5 kali lebih penting dibanding j , maka elemen j sama dengan $1/5$ kali pentingnya

dibanding elemen i . Sedangkan untuk perbandingan dua elemen yang sama akan menghasilkan 1, yang memiliki arti sama penting.

2. *Homogeneity*, artinya preferensi seseorang harus dinyatakan dalam skala terbatas sehingga elemen-elemen yang dibandingkan tidak berbeda terlalu jauh agar dapat dibandingkan satu sama lain. Jika aksioma ini tidak terpenuhi, maka elemen-elemen yang dibandingkan tidak *homogeneity* sehingga perlu dibentuk *cluster* (kelompok elemen) yang baru.
3. *Independence*, artinya preferensi dinyatakan dengan mengasumsikan bahwa kriteria tidak bergantung pada alternatif yang ada, melainkan oleh objek keseluruhan. Hal ini menunjukkan bahwa pola ketergantungan pada AHP adalah searah ke atas, artinya perbandingan antar elemen dalam satu tingkat dipengaruhi oleh elemen pada tingkat atasnya.
4. *Expectation*, artinya untuk tujuan pengambilan keputusan, diasumsikan bahwa struktur hierarki lengkap. Apabila asumsi ini tidak terpenuhi, maka pengambil keputusan tidak menggunakan semua kriteria, sehingga keputusan yang diambil dianggap tidak lengkap.

2.1.1 Matriks Perbandingan Berpasangan

Perbandingan berpasangan disusun untuk menentukan prioritas kriteria berdasarkan pilihan atau *judgement* dari pengambil keputusan dengan menilai tingkat kepentingan suatu elemen dibandingkan elemen lainnya. Perbandingan berpasangan tersebut ditransformasikan dalam bentuk matriks perbandingan berpasangan untuk analisis numerik. Perbandingan berpasangan antar alternatif disusun dalam bentuk matriks perbandingan berpasangan, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, dengan $a_{ij} > 0$ dan a_{ij} menyatakan tingkat preferensi dari x_i dengan x_j .

Matriks perbandingan berpasangan AHP disajikan dalam bentuk matriks resiprokal positif [17]. Matriks $A = (a_{ij})$ memiliki nilai *judgement* $a_{ij} = w_i/w_j$, $i, j = 1, \dots, n$ dengan elemen positif serta memenuhi sifat resiprokal $a_{ji} = 1/a_{ij}$.

$$A = (w_i/w_j)_{n \times n} = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Definisi 2.1 [17] Misalkan matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$. Matriks A disebut matriks resiprokal positif jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

1. $a_{ij} > 0$, untuk setiap $i, j = 1, 2, \dots, n$.
2. $a_{ii} = 1$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.
3. $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$, untuk setiap $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Matriks resiprokal positif dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Contoh 2.1 Diberikan matriks perbandingan berpasangan antar elemen yang disajikan pada Tabel 2.2.

Tabel 2. 2 Matriks Perbandingan Berpasangan

	Kriteria 1	Kriteria 2	Kriteria 3	Kriteria 4
Kriteria 1	1	1	3	5
Kriteria 2	1	1	5	4
Kriteria 3	1/3	1/5	1	3
Kriteria 4	1/5	1/4	1/3	1

2.1.2 Vektor Prioritas

Vektor prioritas merupakan peringkat numerik dari alternatif-alternatif yang menunjukkan urutan antar preferensi [15]. Vektor prioritas disajikan dalam bentuk vektor yang merupakan prioritas dari masing-masing elemen. Vektor prioritas diformulasikan sebagai berikut:

$$w = (w_1, \dots, w_n)^T \quad (2.3)$$

dengan w_i adalah prioritas atau bobot dari alternatif x_i .

Metode *eigen vector* dan rata-rata geometri digunakan untuk menentukan vektor prioritas. Sebuah matriks memiliki nilai dan *eigen vector* yang didefinisi sebagai berikut:

Definisi 2.2 Jika A merupakan matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ disebut *eigen vector* dari A jika

$$Aw = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nw \quad (2.4)$$

w disebut sebagai *vector eigen* dari A dengan nilai *eigen* (*eigen value*) n .

Dalam aljabar linear, semua nilai *eigen* $\lambda_1 = 1, 2, \dots, n$ adalah nol, kecuali satu yang disebut dengan λ_{maks} . Matriks *reciprocal* positif A yaitu $a_{ji} = 1/a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $a_{ii} = 1$ untuk semua nilai i , berlaku

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n \quad (2.5)$$

Nilai-nilai w_i/w_j hanya bisa ditaksir, sehingga diperoleh $Aw = \lambda_{maks} w$ dengan λ_{maks} adalah nilai *eigen* terbesar dari A . Nilai λ_{maks} digunakan untuk mengkonstruksi vektor prioritas yang mempunyai nilai lebih besar daripada ukuran matriks A .

Contoh 2.2 Diberikan matriks perbandingan berpasangan yang disajikan pada Tabel 2.1, maka untuk mencari nilai *eigen* dan *eigen vector* dari matriks tersebut dengan cara menormalisasikan matriks, yaitu unsur-unsur pada setiap kolom dibagi dengan jumlah kolom yang bersangkutan, sehingga diperoleh bobot relatif yang dinormalkan. Sedangkan *eigen vector* diperoleh dari nilai rata-rata bobot relatif setiap baris. Matriks faktor pembobotan dan *eigen vector* disajikan pada Tabel 2.3, yaitu sebagai berikut:

Tabel 2. 3 Matriks Faktor Pembobotan dan *Eigen Vector*

	Kriteria 1	Kriteria 2	Kriteria 3	Kriteria 4	<i>Eigen Vector</i>
Kriteria 1	0,395	0,408	0,321	0,385	0,377
Kriteria 2	0,395	0,408	0,536	0,308	0,412
Kriteria 3	0,131	0,082	0,107	0,231	0,138
Kriteria 4	0,079	0,102	0,036	0,077	0,073

Weighted Sum Vector diperoleh dari hasil perkalian antara matriks perbandingan berpasangan dengan *eigen vector*, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0,333 & 0,2 & 1 & 3 \\ 0,2 & 0,25 & 0,333 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,377 \\ 0,412 \\ 0,138 \\ 0,073 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,569 \\ 1,771 \\ 0,566 \\ 0,298 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menguji *Consistency Vector* (CV) dengan cara membagi nilai *Weighted Sum Vector* dengan *eigen vector*, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1,569/0,377 \\ 1,771/0,412 \\ 0,566/0,138 \\ 0,298/0,073 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,159 \\ 4,303 \\ 4,108 \\ 4,055 \end{bmatrix}$$

Nilai *eigen* maksimum diperoleh dari nilai rata-rata *Consistency Vector* yaitu sebagai berikut:

$$\lambda_{maks} = \frac{4,159 + 4,303 + 4,108 + 4,055}{4} = \frac{16,625}{4} = 4,156$$

Metode rata-rata geometrik (*geometric mean*) diusulkan oleh Crawford dan Williams digunakan untuk mengestimasi vektor prioritas. Nilai *geometric mean* diperoleh dari perkalian masing-masing nilai kemudian dipangkatkan dengan $1/n$.

$$\mu = \sqrt[n]{\left(\prod_{j=1}^n a_{ij}\right)} \quad (2.6)$$

dimana:

μ : *geometric mean*

a_{ij} : nilai elemen matriks baris ke-i kolom ke-j

n : jumlah para ahli

Setiap komponen pada $\mathbf{w}$ yaitu w_i diperoleh dari nilai *geometric mean* setiap elemen pada masing-masing baris yang dibagi dengan hasil normalisasi [18] seperti persamaan berikut:

$$w_i = \frac{\sqrt[n]{\left(\prod_{j=1}^n a_{ij}\right)}}{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt[n]{\left(\prod_{j=1}^n a_{ij}\right)}\right)} \quad (2.7)$$

Metode lainnya yang dapat digunakan adalah metode normalisasi. Metode normalisasi yaitu metode dengan membuat total bobot prioritas setiap kolom pada matriks berjumlah 1. Matriks yang sudah dinormalisasi kemudian dihitung rata-rata setiap barisnya sehingga diperoleh vektor prioritas dengan jumlah 1.

2.2 Teori Trapezoidal Fuzzy

Teori himpunan *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Prof. Lotfi A. Zadeh. *Fuzzy* berarti “kabur” atau “samar-samar”, sedangkan himpunan *fuzzy* pengembangan dari himpunan tegas (*crisp*). Himpunan tegas (*crisp*) memiliki dua kemungkinan nilai keanggotaan yaitu satu (1) berarti bahwa suatu item merupakan anggota dalam suatu himpunan dan nol (0) yang artinya bahwa suatu item bukan anggota dalam suatu himpunan. Sebaliknya, himpunan *fuzzy* memiliki nilai keanggotaan antara 0 dan 1 yang berarti memiliki nilai kekaburan antara salah dan benar (*fuzziness*). Jika himpunan tegas hanya mengenal hitam atau putih, himpunan *fuzzy* dapat mengenal hitam, abu-abu dan putih, serta konsep tidak pasti seperti sedikit, lumayan dan sangat.

Definisi 2.3 [19] *Himpunan A dalam semesta X dapat dinyatakan dengan fungsi karakteristik yaitu $\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in A \\ 0, & \text{jika } x \notin A \end{cases} \quad (2.8)$$

Contoh 2.3

Jika X merupakan himpunan semua departemen di Universitas Diponegoro dan A merupakan departemen di Fakultas Kedokteran.

$A = \{x \mid x \text{ yaitu departemen di Fakultas Kedokteran}\}$,

$\chi_A(\text{Kedokteran}) = 1$, $\chi_B(\text{Keperawatan}) = 1$, $\chi_C(\text{Matematika}) = 0$.

Fungsi karakteristik dari himpunan *crisp* A menyatakan secara tegas bahwa elemen dari anggota A mempunyai nilai 1 (satu) dan nilai 0 (nol) untuk elemen yang bukan anggota A. Kedokteran dan Keperawatan mempunyai fungsi karakteristik 1 karena merupakan departemen di Fakultas Kedokteran. Matematika mempunyai fungsi karakteristik 0 karena bukan merupakan departemen di Fakultas Kedokteran.

Definisi 2.4 [19] *Himpunan fuzzy A dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut yaitu $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$ dalam semesta X dengan $\mu_{\tilde{A}}$ merupakan fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang artinya pemetaan dari himpunan semesta X ke selang tertutup $[0,1]$.*

Contoh 2.4

Diberikan $\tilde{A}$ adalah himpunan bilangan real dengan $\tilde{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dengan fungsi keanggotaannya adalah $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ yaitu sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x = 2 \\ 0.5, & \text{jika } x = 4 \\ 1, & \text{jika } x = 6 \\ 0.5, & \text{jika } x = 8 \\ 0, & \text{jika } x = 10 \end{cases}$$

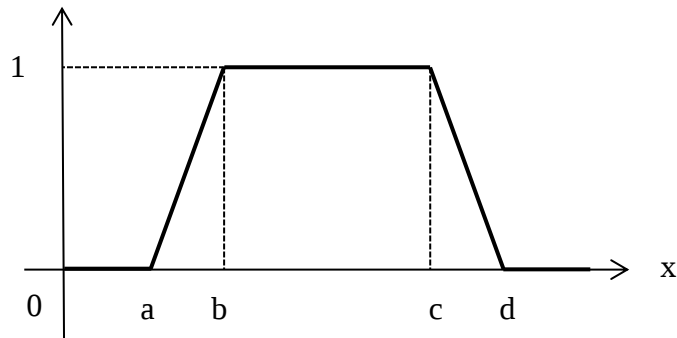
Menurut Definisi 2.4 himpunan *fuzzy* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \{(2, 0), (4, 0.5), (6, 1), (8, 0.5), (10, 0)\}$$

Definisi 2.5 [20] Suatu fungsi keanggotaan himpunan fuzzy disebut fungsi keanggotaan trapezium jika mempunyai empat buah parameter, yaitu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dimana $\mathbb{R}$ adalah bilangan real dengan $a < b < c < d$ dan dinyatakan dengan $\mu_{\tilde{A}}(x; a, b, c, d)$ berdasarkan aturan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x \geq d \end{cases} \quad (2.9)$$

Fungsi Keanggotaan Trapezoidal Fuzzy Number $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ dapat disajikan pada Gambar 2.2

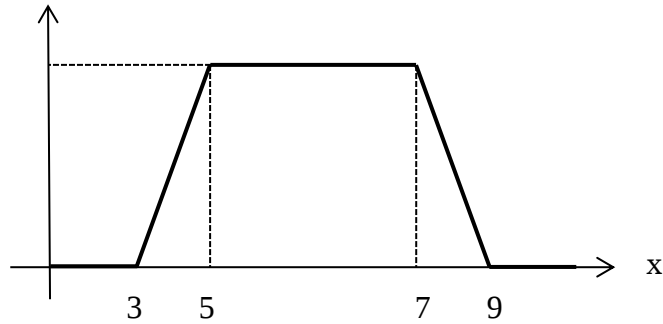


Gambar 2. 2 Fungsi Keanggotaan Trapezoidal Fuzzy Number $\tilde{A} = (a, b, c, d)$

Contoh 2.5

Misalkan $\tilde{A} = \{3, 5, 7, 9\}$ merupakan bilangan fuzzy trapesium jika memenuhi fungsi keanggotaan dari (2.11) maka diperoleh hasil berdasarkan aturan pada Definisi 2.5 yaitu sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ \frac{x-3}{5-3}, & 3 \leq x \leq 5 \\ 1, & 5 \leq x \leq 7 \\ \frac{9-x}{9-7}, & 7 \leq x \leq 9 \\ 0, & x \geq 9 \end{cases}$$



Gambar 2. 3 Fungsi Keanggotaan *Trapezoidal Fuzzy Number* $\tilde{A} = \{3, 5, 7, 9\}$

Gambar 2.3 menunjukkan nilai antara 3 sampai 9 mempunyai derajat keanggotaan yang berbeda-beda. Nilai 5 sampai dengan 7 mempunyai derajat keanggotaan 1 artinya untuk nilai 5 sampai dengan 7 mempunyai tingkat keyakinan 1. Nilai x antara 3 sampai dengan 5 mempunyai derajat keanggotaan $\frac{x-3}{5-3}$ berarti bahwa nilai antara 3 sampai dengan 5 mempunyai tingkat keyakinan $\frac{x-3}{5-3}$. Nilai x antara 7 sampai dengan 9 mempunyai derajat keanggotaan $\frac{9-x}{9-7}$ berarti bahwa untuk nilai 7 sampai dengan 9 mempunyai tingkat keyakinan $\frac{9-x}{9-7}$. Nilai $x \geq 9$ mempunyai tingkat keyakinan 0.

Definisi 2.4 [19] *Operasi aritmatika dapat diterapkan pada Trapezoidal Fuzzy Number. Diberikan $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ dan $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ merupakan dua Trapezoidal Fuzzy Number, maka operasi aritmatika fuzzy dapat didefinisikan sebagai berikut:*

i. *Penjumlahan*

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

ii. *Pengurangan*

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, d_1 - d_2)$$

iii. *Perkalian*

Perkalian skalar dengan bilangan real yaitu sebagai berikut:

$$\lambda \otimes \tilde{A} = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1), \text{ untuk } \lambda > 0, \lambda \in R, a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0$$

Perkalian antara dua Trapezoidal Fuzzy Number yaitu sebagai berikut:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2), \text{ untuk } a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0, d_i > 0, i = 1, 2$$

iv. *Invers Fuzzy*

$$(\tilde{A})^{-1} = \left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{a_1} \right), \text{ untuk } a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0$$

1.3 *Multiple Criteria Decision Making (MCDM)*

Multiple Criteria Decision Making (MCDM) merupakan metode pengambilan keputusan untuk memilih alternatif terbaik dari sejumlah alternatif berdasarkan kriteria yang telah ditetapkan. MCDM terbagi menjadi dua model yaitu *Multiple Objective Decision Making (MODM)* dan *Multiple Attribute Decision Making (MADM)*. MADM digunakan untuk mengambil keputusan dari beberapa alternatif dalam jumlah terbatas. MODM merupakan model yang digunakan untuk mengambil keputusan dengan banyaknya alternatif tak terbatas serta timbal balik antar kriteria didefinisikan dengan menggunakan fungsi kontinu. MADM digunakan untuk memilih alternatif terbaik dari sejumlah alternatif, sedangkan MODM digunakan untuk membuat rancangan alternatif terbaik.

Ada beberapa fitur yang digunakan dalam MCDM, yaitu sebagai berikut [21]:

1. Alternatif yaitu objek-objek yang berbeda serta memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih oleh pengambil keputusan.
2. *Attribute* atau biasa disebut karakteristik, komponen, kriteria keputusan. Terdapat beberapa kriteria bersifat satu level, tetapi ada juga sub kriteria yang berhubungan dengan kriteria yang diberikan.
3. Konflik antar kriteria, biasanya terdapat beberapa kriteria yang memiliki konflik antar satu dengan yang lainnya, misalnya kriteria keuntungan akan mengalami konflik dengan kriteria biaya.
4. Bobot keputusan menunjukkan tingkat kepentingan relatif terhadap suatu kriteria.

5. Matriks keputusan yang berukuran $m \times n$ berisi elemen-elemen x_{ij} yang merepresentasikan rating alternatif terhadap kriteria.

Tabel 2. 4 Perbedaan MADM dan MODM

	MADM	MODM
Kriteria	Atribut	Objektif
Tujuan	<i>Implisit</i> (tersirat)	<i>Explicit</i> (gamblang)
Atribut	<i>Explicit</i>	<i>Implisit</i>
Batasan	Tidak aktif (menggabungkan ke dalam atribut)	Aktif
Alternatif	Diskrit	Kontinu
Interaksi dengan pihak pengambilan keputusan	Tidak banyak	Banyak
Kegunaan	Seleksi/evaluasi	Desain