

BAB II

DASAR TEORI

2.1 *Multi-Criteria Decision Making (MCDM)*

MCDM merupakan pendekatan pada metode dalam pengambilan keputusan yang didasarkan pada alternatif/pilihan yang tersedia dari multi kriteria. Pada dasarnya MCDM merupakan pengembangan pada sistem riset operasi yang mencakup aspek kualitatif dan kuantitatif [10]. Mutli-Criteria Decision Making (MCDM) banyak digunakan pada ruang lingkup dalam proses pengambilan keputusan yang berkaitan dengan penyelesaian masalah dengan kompleksitas yang rumit dan sulit diukur secara pasti [11].

Dalam metode konvensional, suatu permasalahan umumnya dibatasi pada satu kriteria saja sehingga hasil akhir yang dipilih adalah pilihan yang memenuhi suatu fungsi tersebut secara obyektif [12]. Apabila permasalahan tersebut memiliki minimal dua kriteria yang saling bertentangan, dan masing-masing dari kriteria tersebut dapat menghasilkan solusi alternatif yang berbeda, maka permasalahan tersebut dapat dikatakan MCDM. Implementasi pada MCDM terdiri dari 10 tahapan [13], yaitu mendefinisikan problem penelitian dan aturan, menentukan tujuan, mengidentifikasi solusi, mengevaluasi kriteria, menentukan teknik yang akan digunakan, implementasi teknik, survei pakar/ pengumpulan data, analisis data sesuai dengan teknik yang digunakan, menentukan solusi yang paling mungkin, dan implementasi hasil akhir.

2.2 *Himpunan Fuzzy*

Himpunan merupakan kumpulan obyek-obyek (konkret maupun abstrak) yang memiliki kesamaan pada suatu sifat tertentu [14]. Himpunan fuzzy mempunyai peranan yang penting dalam perkembangan matematika khususnya dalam matematika himpunan. Matematikawan German George Cantor (1845-1918) adalah orang yang pertama kali secara formal mempelajari konsep tentang himpunan [15]. Untuk memahami pemahaman lebih lanjut mengenai himpunan yang bersifat abstrak (*fuzzy*), akan dikenalkan pemahaman mengenai himpunan tegas (*crisp set*).

Suatu himpunan harus dapat terdefinisi secara tegas untuk setiap obyek agar dapat ditentukan secara tegas apakah obyek tersebut merupakan suatu anggota himpunan tertentu atau bukan anggota. Pada himpunan tegas (*crisp*), nilai keanggotaan suatu variabel x dalam himpunan A dapat ditulis dengan $\chi_A(x)$ yang memiliki dua kemungkinan, yaitu [14]:

- Bernilai satu (1), sehingga dapat dikatakan bahwa suatu variabel menjadi anggota dalam suatu himpunan
- Bernilai nol (0), sehingga dapat dikatakan bahwa suatu variabel tidak menjadi anggota dalam suatu himpunan

Definisi 2.1 [16] Diketahui suatu himpunan A yang terdapat pada semesta X . Untuk setiap $x \in X$ dinyatakan dengan fungsi karakteristik $\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}$ yang didefinisikan dengan aturan:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Contoh 2.1

Diberikan himpunan A dan B dalam semesta X dengan $X = \{3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{4,5,7\}$, dan $B = \{3,6,8\}$

Nilai keanggotaan 4 pada himpunan A , $\chi_A(4) = 1$, karena $4 \in A$.

Nilai keanggotaan 5 pada himpunan A , $\chi_A(5) = 1$, karena $5 \in A$.

Nilai keanggotaan 6 pada himpunan A , $\chi_A(6) = 0$, karena $6 \notin A$.

Nilai keanggotaan 6 pada himpunan B , $\chi_B(6) = 1$, karena $6 \in B$.

Definisi 2.2 [16] Suatu himpunan A dikatakan himpunan bagian (sub himpunan) dari himpunan B , dengan $A \subseteq B$, jika setiap anggota dari himpunan A juga merupakan anggota dari himpunan B .

Contoh 2.2

Diberikan $\mathbb{Z} = \{x | x \text{ adalah bilangan bulat}\}$ dan $\mathbb{R} = \{x | x \text{ adalah bilangan real}\}$, karena bulangan bulat tentu berada pada bilangan real, maka berlaku bilangan sebagai sub-himpunan dari bilangan real $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Definisi 2.3 [16] Dua buah himpunan A dan B dikatakan sama, dengan notasi $A = B$, jika setiap anggota himpunan A adalah anggota himpunan B dan setiap anggota himpunan B adalah anggota himpunan A . Dengan kata lain $A = B$ jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh 2.3

Diberikan $A = \{0 < x < 8 | x \text{ adalah bilangan ganjil}\}$ dan $B = \{1, 3, 5, 7\}$, maka diperoleh $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $A \subseteq B$, dan $B \subseteq A$, dengan kata lain, $A = B$.

Tidak semua himpunan dapat dinyatakan dalam himpunan tegas (*crisp*), misalnya himpunan dari sekumpulan hewan, himpunan berat badan, himpunan skala kecerdasan, dan lainnya. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, Zadeh menginterpretasikan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan syarat keanggotaan himpunan tersebut.. Fungsi tersebut dikenal sebagai fungsi keanggotaan dan nilai fungsi itu disebut derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan tersebut. himpunan tersebut disebut himpunan *fuzzy* [16]. Himpunan *fuzzy* disimbolkan dengan $\tilde{A}$.

Derajat keanggotaan biasa dinyatakan dalam suatu bilangan real pada selang tertutup $[0,1]$. Fungsi keanggotaan suatu himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada semesta X merupakan pemetaan $\mu_{\tilde{A}}$ dari X pada interval $[0,1]$, yaitu $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$. Nilai fungsi $\mu_{\tilde{A}}(x)$ menyatakan derajat keanggotaan $x \in X$ dalam himpunan kabur $\tilde{A}$. Nilai fungsi bernilai 1 menyatakan keanggotaan penuh sedangkan nilai fungsi bernilai 0 menyatakan bukan keanggotaan himpunan *fuzzy* tersebut. Himpunan tegas dapat diperhatikan sebagai kejadian khusus dari himpunan *fuzzy*, yaitu himpunan *fuzzy* yang fungsi keanggotaannya hanya bernilai 0 atau 1 saja [16].

Menurut [14], ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam memahami logika *fuzzy*, yaitu:

a. Variabel *fuzzy*

Variabel (atribut) adalah suatu entitas yang dapat digunakan untuk mewakili sembarang anggota dari semesta pembicaraan. Variabel tidak hanya berupa angka saja tetapi juga dapat mewakili benda atau tempat. Contoh: umur, temperatur, permintaan, IPK.

b. Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* memiliki 2 atribut:

1. Linguistik, yaitu penyebutan suatu grup yang menghubungkan suatu keadaan atau kondisi tertentu. Contoh: rendah, sedang dan tinggi.
2. Numerik, yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan besaran atau ukuran dari suatu variabel seperti: 10, 5, 4, dsb.

c. Semesta Pembicaraan

Semesta pembicaraan merupakan himpunan yang mencakup seluruh objek pembicaraan. Semesta pembicaraan biasanya berupa himpunan bilangan real yang naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan dan pembicaraan ini tidak dibatasi batas atasnya.

d. Domain

Domain himpunan *fuzzy* adalah nilai keseluruhan yang diperbolehkan dalam semesta pembicaraan dan dapat dioperasikan dalam suatu himpunan *fuzzy*. Sama seperti semesta pembicaraan, domain merupakan himpunan bilangan real yang naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan.

Definisi 2.4 [16] Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dalam himpunan semesta X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ dimana $\mu_{\tilde{A}}$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$, yang merupakan suatu pemetaan dari himpunan semesta X ke interval tertutup $[0,1]$ dan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$.

Contoh 2.5 Diberikan suatu semesta himpunan $X = \{1, 5, 7\}$, misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan bilangan bulat dekat dengan nol dan fungsi keanggotaannya diberikan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \text{ untuk } x = 1$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5 \text{ untuk } x = 5$$

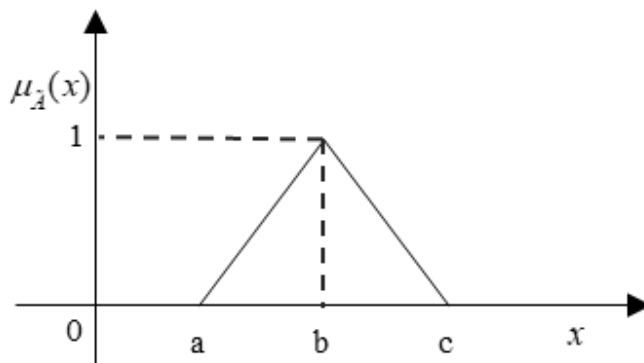
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \text{ untuk } x = 7$$

himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dapat dinyatakan dengan $\tilde{A} = \{(1; 0), (5; 0,5), (7; 1)\}$.

Himpunan fuzzy memiliki beberapa fungsi keanggotaan yaitu fungsi keanggotaan linier, segitiga, fungsi keanggotaan segitiga, fungsi keanggotaan Gauss, dan fungsi keanggotaan Cauchy. Pada tugas akhir ini hanya dibatasi pada pembahasan fungsi keanggotaan segitiga yaitu:

Definisi 2.5 [16] Suatu fungsi keanggotaan himpunan fuzzy disebut fungsi keanggotaan segitiga jika mempunyai tiga buah parameter, yaitu $a, b, c \in \mathbb{R}$ dengan $a < b < c$, dan dinyatakan dengan segitiga $(x; a, b, c)$ dengan aturan:

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$



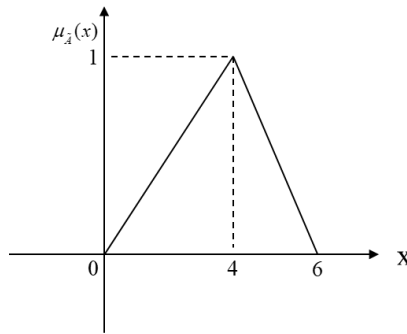
Gambar 2.1 Fungsi keanggotaan segitiga

Fungsi keanggotaan tersebut dapat juga dinyatakan dengan formula sebagai berikut

$$\mu_{\tilde{A}} = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Contoh 2.6 Diberikan himpunan $\tilde{A}$ dengan fungsi keanggotaan $x \in X$ dapat ditulis:

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{untuk } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{6-x}{2}, & \text{untuk } 4 \leq x < 6 \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$



Gambar 2.2 Fungsi keanggotaan segitiga $(x; 0, 4, 6)$

Selanjutnya, untuk mengetahui derajat keanggotaan tiap elemen misalkan $X = \{1, 5, 7\}$, maka akan diperoleh hasil:

$$\mu_{\tilde{A}}(1) = \frac{1}{4} = 0,25; \mu_{\tilde{A}}(5) = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2} = 0,5; \mu_{\tilde{A}}(7) = 0.$$

Definisi 2.6 [16] Himpunan fuzzy yang tingginya sama dengan 1 disebut himpunan fuzzy normal.

Contoh 2.7 Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada Contoh 2.6 merupakan himpunan fuzzy normal karena $\text{Tinggi}(\tilde{A}) = 1$.

Definisi 2.7 [16] Pendukung (support) dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yang dilambangkan dengan $\text{Pend}(\tilde{A})$, merupakan himpunan tegas yang memuat semua unsur dari semesta yang mempunyai derajat keanggotaan tak nol dalam $\tilde{A}$, yaitu:

$$Pend(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Contoh 2.8 Pada contoh 2.6 pendukung (*support*) dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yaitu:

$$\begin{aligned} Pend(\tilde{A}) &= \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \\ &= \{x \in X \mid 0 < x < 6\} \\ &= (0, 6) \end{aligned}$$

Definisi 2.8 [16] Potongan α dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yang dilambangkan dengan A_α merupakan himpunan tegas yang memuat semua elemen dari semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\tilde{A}$ yang lebih besar atau sama dengan α , yaitu:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \text{ dimana } \alpha \in [0, 1].$$

Contoh 2.9 Pada Contoh 2.6 diperoleh potongan α dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yaitu:

$$\text{Untuk } \alpha = 0 \text{ maka } A_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\} = \mathbb{R}$$

$$\text{Untuk } \alpha = 0.5 \text{ maka } A_{0.5} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$$

$$\text{Untuk } \alpha = 1 \text{ maka } A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 4\}.$$

Definisi 2.9 [16] Himpunan fuzzy pada $\mathbb{R}$ dikatakan konveks jika dan hanya jika memenuhi syarat:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan $\lambda \in [0, 1]$.

Contoh 2.10 Pada Contoh 2.5 nilai $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ dan $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ disajikan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.1 Nilai $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ dan $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$

x_1	x_2	$\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$	$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$		
			$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$0 < \lambda < 1$ $\lambda = \frac{1}{a}, a > 1$
$x \leq 0$	$x \leq 0$	0	0	0	0
$x \leq 0$	$0 < x \leq 4$	0	$\frac{x_2}{4}$	0	$\frac{x_2}{4a}(a-1)$
$x \leq 0$	$4 < x < 6$	0	$\frac{6-x_2}{2}$	0	$\frac{6-x_2}{2a}(a-1)$

$x \leq 0$	$x \geq 6$	0	0	0	0
$0 < x \leq 4$	$x \leq 0$	0	0	$\frac{x_1}{4}$	$\frac{x_1}{4a}$
$0 < x \leq 4$	$0 < x \leq 4$	$\min\{\frac{x_1}{4}, \frac{x_2}{4}\}$	$\frac{x_2}{4}$	$\frac{x_1}{4}$	$\frac{x_1}{4a} + \frac{x_2}{4a}(a-1)$
$0 < x \leq 4$	$4 < x < 6$	$\min\{\frac{x_1}{4}, \frac{6-x_2}{2}\}$	$\frac{6-x_2}{2}$	$\frac{x_1}{4}$	$\frac{x_1}{4a} + \frac{6-x_2}{2a}(a-1)$
$0 < x \leq 4$	$x \geq 6$	0	0	$\frac{x_1}{4}$	$\frac{x_1}{4a}$
$4 < x < 6$	$x \leq 0$	0	0	$\frac{6-x_1}{2}$	$\frac{6-x_1}{2a}$
$4 < x < 6$	$0 < x \leq 4$	$\min\{\frac{6-x_1}{2}, \frac{x_2}{4}\}$	$\frac{x_2}{4}$	$\frac{6-x_1}{2}$	$\frac{6-x_1}{2a} + \frac{x_2}{4a}(a-1)$
$4 < x < 6$	$4 < x < 6$	$\min\{\frac{6-x_1}{2}, \frac{6-x_2}{2}\}$	$\frac{6-x_2}{2}$	$\frac{6-x_1}{2}$	$\frac{6-x_1}{2a} + \frac{6-x_2}{2a}(a-1)$
$4 < x < 6$	$x \geq 6$	0	0	$\frac{6-x_1}{2}$	$\frac{6-x_1}{2a}$
$x \geq 6$	$x \leq 0$	0	0	0	0
$x \geq 6$	$0 < x \leq 4$	0	$\frac{x_2}{4}$	0	$\frac{x_2}{4a}(a-1)$
$x \geq 6$	$4 < x < 6$	0	$\frac{6-x_2}{2}$	0	$\frac{6-x_2}{2a}(a-1)$
$x \geq 6$	$x \geq 6$	0	0	0	0

Dari Tabel 2.2 terbukti bahwa himpunan fuzzy $\tilde{A}$ konveks karena nilai $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan $\lambda \in [0,1]$.

2.3 Bilangan Fuzzy

Pada himpunan fuzzy nilai keanggotaan terletak pada rentang 0 sampai 1. Selanjutnya akan dibahas bilangan fuzzy yang merupakan perluasan konsep dari bilangan tegas. Bilangan fuzzy dapat diartikan sebagai bilangan yang tidak tepat. misalkan pada kasus berat badan “kurang lebih 70 kg”, maka apabila beratnya 70 kg dapat dinyatakan memiliki derajat keanggotaan 1, sedangkan bilangan lainnya dinyatakan dengan interval $[0,1)$. Bila berat badan semakin jauh dari 70 kg maka derajat keanggotaan semakin mendekati 0.

Definisi 2.10 [16] Bilangan fuzzy didefinisikan sebagai himpunan fuzzy dalam semesta himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ yang memenuhi empat sifat

1. Normal.
2. Mempunyai pendukung yang terbatas.
3. Semua potongan- α nya adalah interval tertutup di $\mathbb{R}$.
4. Konveks.

Contoh 2.11 Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada Contoh 2.6 merupakan bilangan *fuzzy* karena telah memenuhi empat syarat yaitu:

1. Normal

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada Contoh 2.5 merupakan normal seperti yang tertera pada Contoh 2.8

2. Mempunyai pendukung yang terbatas

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada Contoh 2.5 mempunyai pendukung yang terbatas seperti yang tertera pada Contoh 2.6 diperoleh $Pend(\tilde{A}) = \{x \in X \mid 0 < x < 6\}$.

3. Semua potongan- α -nya adalah selang tertutup dalam $\mathbb{R}$

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada Contoh 2.5 semua potongan- α berada pada selang tertutup dalam $\mathbb{R}$ seperti yang tertera pada Contoh 2.9 bahwa untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, semua potongan- α berada pada selang tertutup dalam $\mathbb{R}$.

4. Konveks

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada Contoh 2.5 adalah konveks karena telah dibuktikan pada Contoh 2.10.

2.4 Analytical Hierarchy Process (AHP)

Analytical Hierarchy Process (AHP) merupakan suatu hierarki fungsional yang input utamanya berupa perspektif atau sudut pandang manusia. Dengan adanya hierarki, suatu masalah yang kompleks dan tidak terstruktur dapat dipecahkan menjadi model pengambilan keputusan. AHP digunakan dengan tujuan untuk menyusun prioritas dari berbagai alternatif atau solusi dalam suatu kelompok menjadi sebuah bentuk hierarki [17].

Metode AHP merupakan salah satu metode yang memiliki beberapa kriteria untuk membantu menyusun suatu prioritas dari berbagai pilihan, sehingga AHP termasuk dalam metode pemecahan masalah *multi-criteria decision making* (MCDM). Karena didasarkan pada suatu proses yang terstruktur dan logis bersifat multi kriteria, AHP cukup banyak digunakan pengambil keputusan dalam penyusunan prioritas [17].

Metode AHP menjelaskan tentang pengukuran yang digunakan untuk menemukan skala rasio dengan melakukan perbandingan berpasangan antar faktor. Perbandingan tersebut dapat diperoleh dengan melakukan pengukuran relatif maupun pengukuran aktual, bisa berupa tingkat kepentingan, perasaan (intuisi), derajat kesukaan, pengalaman seseorang maupun fakta yang dapat menjadi acuan pada kekuatan atau preferensi relatif tersebut. AHP dikembangkan oleh Prof. Thomas L. Saaty tahun 1971 dengan tujuan untuk memecahkan permasalahan yang kompleks dengan aspek atau kriteria yang diambil cukup banyak, namun dapat membantu pengambil keputusan untuk mendapatkan keputusan yang terbaik. Kompleksitas tersebut disebabkan oleh struktur permasalahan yang belum jelas, ketidakpastian persepsi pengambil keputusan dan tersedianya data statistik yang akurat. AHP digunakan untuk menurunkan skala rasio dari beberapa perbandingan berpasangan yang bersifat diskrit maupun kontinu. Perbandingan berpasangan tersebut dapat diperoleh melalui pengukuran aktual maupun pengukuran relatif dari derajat kesukaan, atau kepentingan atau perasaan. Dengan demikian metode ini sangat berguna untuk membantu mendapatkan skala rasio dari hal-hal yang semula sulit iukur seperti pendapat, perasaan, prilaku dan kepercayaan [18].

Proses AHP mempunyai prinsip dasar dengan memecah suatu permasalahan menjadi unsur-unsur yang terpisah. Pada dasarnya, metode AHP dapat memecah suatu situasi ke dalam bagian elemen-elemen dan menatanya ke dalam bentuk susunan hierarki. Langkah awal yang harus dilakukan yaitu dengan mencari suatu permasalahan terkait dengan pemilihan atau penentuan sesuatu dengan mendefinisikan kondisi tersebut secara seksama dan memasukkan rincian elemen yang relevan sebanyak mungkin. Kemudian disusun model atau bagan struktur yang terdiri dari tujuan utama atau fokus masalah, kriteria, dan alternatif.

Metode AHP (*Analytical Hierarchy Process*) memiliki beberapa tahapan yang harus dilakukan dalam menentukan keputusan yang akan dipilih, di antaranya yaitu [18]:

- 1.) Menentukan tujuan/urutan kriteria dan alternatif,
- 2.) Menyusun hierarki dari kriteria dan alternatif yang sudah dipilih,

- 3.) Memberi nilai pada alternatif dan kriteria,
- 4.) Memeriksa kembali konsistensi penilaian alternatif dan kriteria,
- 5.) Menentukan prioritas kriteria dan alternatif yang akan dipilih

2.5.1 Dasar-dasar AHP

Dasar-dasar dalam penggunaan metode AHP yaitu dekomposisi (*decomposition*), perbandingan penilaian atau pertimbangan (*comparative judgements*), dan sintesa prioritas (*priority synthesis*) [19].

1. Dekomposisi (*Decomposition*)

Pada tahapan ini, struktur masalah yang kompleks dibagi menjadi bagian-bagian dalam suatu hierarki. Tujuannya yaitu untuk mendefinisikan bagian yang umum menjadi khusus. Dalam bentuk yang paling sederhana struktur berfungsi sebagai wadah untuk membandingkan antara tujuan, kriteria, dan level alternatif. Bagian-bagian himpunan alternatif dibagi menjadi tingkatan-tingkatan yang lebih detail dengan mencakup kriteria yang lain, yang tingkatan tertinggi dari hierarki yaitu tujuan utama dari penyelesaian masalah dan hanya ada satu elemen, kemudian tingkatan berikutnya memiliki beberapa elemen sebagai kriteria yang masing-masing elemen tersebut bisa dibandingkan antara satu dan lainnya.

2. Perbandingan Penilaian/Pertimbangan (*Comparative Judgements*)

Pada tahapan ini akan dibuat suatu perbandingan berpasangan dari semua elemen yang ada dalam hierarki dengan tujuan untuk menghasilkan sebuah skala kepentingan relatif dari masing-masing elemen. Pengambil keputusan akan menghasilkan sebuah skala kepentingan relatif dari masing-masing elemen. Pengambil keputusan akan membuat sebuah skala penilaian berupa angka. Perbandingan berpasangan dalam bentuk matriks jika dikombinasikan akan menghasilkan sebuah prioritas.

3. Sintesa Prioritas (*Priority Synthesis*)

Pada tahapan ini, sintesa prioritas didapatkan dari hasil perkalian prioritas local dengan prioritas dari suatu kriteria tertentu yang ada pada level di atasnya dan menambahkannya ke masing-masing elemen dalam level yang

dipengaruhi oleh kriteria. Hasilnya berupa gabungan prioritas atau prioritas global (global priority) kemudian dapat digunakan untuk memberikan bobot prioritas lokal dari elemen yang ada pada level terendah (alternatif pilihan) dalam hierarki sesuai dengan kriterianya.

2.5 Fuzzy Synthetic Extent

Fuzzy Synthetic Extent digunakan untuk memperoleh suatu perluasan obyek dalam memenuhi tujuan. [20] memperkenalkan metode extent analysis untuk nilai sintesis pada perbandingan berpasangan pada *fuzzy AHP*.

Dalam metode tersebut, setiap kriteria diambil dan dianalisa untuk setiap kriteria dengan menggunakan nilai *fuzzy*. Nilai *fuzzy synthetic extent* dipakai untuk memperoleh perluasan suatu objek. Sehingga diperoleh nilai extent analisis M yang dapat ditunjukkan sebagai $M_{gi}^1, M_{gi}^2, \dots, M_{gi}^k, \quad i = 1, 2, \dots, n$ dimana $M_{gi}^j (j = 1, 2, \dots, k)$ adalah *triangular fuzzy number*.

Adapun pendefinsian nilai *fuzzy synthetic extent* untuk i -objek adalah sebagai berikut:

$$Si = \sum_{j=1}^k M_{gi}^j \otimes [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{gi}^j]^{-1}$$

Agar memperoleh M_{gi}^j , maka diperlukan operasi penjumlahan nilai *fuzzy M* untuk matriks sebagian dengan melakukan operasi penjumlahan pada setiap *triangular fuzzy number* dengan baris seperti berikut: (1)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{gi}^j = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k l_{ij}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k u_{ij})$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$

Keterangan:

M = *triangular fuzzy number*

k = jumlah kriteria

j = kolom

i = baris

g = parameter (l, m, u)

n = banyaknya elemen

Nilai $[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{gi}^j]^{-1}$ atau $\frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{gi}^j}$ diperoleh dengan melakukan operasi penjumlahan untuk keseluruhan bilangan triangular fuzzy $M_{gi}^j (j = 1, 2, \dots, m)$ dalam matrik keputusan ($n \times m$) sebagai berikut:

$$[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{gi}^j] = [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k l_{ij} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k u_{ij}]$$

Sehingga untuk menghitung invers yaitu:

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^k M_{gi}^j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n u_i, \sum_{j=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n l_i}$$

2.6 Matriks

Matriks dapat didefinisikan sebagai suatu kumpulan bilangan-bilangan yang tersusun berdasarkan baris dan kolom yang membentuk segiempat dengan panjang dan lebar ditunjukkan oleh jumlah banyaknya kolom dan baris [21]. Secara umum elemen-elemen pada suatu matriks dilambangkan dengan notasi a_{ij} dengan i sebagai baris dalam matriks, sedangkan j sebagai kolom dalam matriks sehingga notasi a_{ij} merupakan elemen matriks A pada baris ke- i dan kolom ke- j .

Apabila suatu matriks A terdiri dari m baris dan n kolom, maka matriks A dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berordo $m \times n$.

Sedangkan a_{ij} menunjukkan elemen baris ke- i dan kolom ke- j .

Berdasarkan matriks $A_{m \times n}$ maka dapat diperoleh definisi dan teorema sebagai berikut:

Teorema 2.1 [21] *Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran sedemikian hingga operasi yang diberikan berikut dapat dilakukan, maka:*

- a. $(A^t)^t = A$
- b. $(A+B)^t = A^t + B^t$
- c. $(kA)^t = kA^t$ dengan k adalah sembarang bilangan real
- d. $(AB)^t = B^t A^t$

Bukti:

Misalkan A berordo $m \times n$ dan B berordo $m \times n$.

- a. Jika $A = (a_{ij})$, maka $A^t = (a_{ji})$, sehingga $(A^t)^t = (a_{ij})$. Dengan demikian terbukti bahwa $(A^t)^t = A$
- b. Matriks $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$, maka

$$(A+B)^t = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = A^t + B^t$$
 sehingga terbukti bahwa

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$
- c. Matriks $(kA)^t = (ka_{ij})^t = (ka_{ji}) = k(a_{ji}) = (kA^t)$ sehingga terbukti bahwa

$$(kA)^t = kA^t$$
- d. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{jk})$, maka elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks AB adalah $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, yang merupakan elemen dari baris ke- j dan kolom ke- i dari matriks $(AB)^t$. Baris ke- j dari B^t adalah kolom ke- j dari matriks B dan kolom ke- i dari A^t adalah baris ke- i dari matriks A . Jadi elemen baris ke- j kolom ke- i dari $B^t A^t$ adalah $b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \dots + b_{nj}a_{in} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$. Karena elemen pada baris ke- j dan kolom ke- i matriks $(AB)^t$ dan $B^t A^t$ adalah sama, maka terbukti bahwa $(AB)^t = B^t A^t$

Definisi 2.13 [21] *Matriks identitas I_n merupakan matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utamanya bernilai 1.*

Teorema 2.2 [21] Jika $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ dan I_n adalah

matriks identitas yang berukuran $n \times n$, maka $AI_n = A$

Bukti:

$$\begin{aligned} AI_n &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + \cdots + a_{1n} \cdot 0 & a_{12} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + \cdots + a_{1n} \cdot 0 & \cdots & a_{12} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + \cdots + a_{1n} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + \cdots + a_{2n} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 + \cdots + a_{2n} \cdot 0 & \cdots & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + \cdots + a_{2n} \cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot 1 + a_{m2} \cdot 0 + \cdots + a_{mn} \cdot 0 & a_{m1} \cdot 0 + a_{m2} \cdot 1 + \cdots + a_{mn} \cdot 0 & \cdots & a_{m1} \cdot 0 + a_{m2} \cdot 0 + \cdots + a_{mn} \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Teorema 2.3 [21] Jika $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ dan I_n adalah matriks

identitas yang berukuran $n \times n$, maka $I_n A = A$

Bukti:

$$\begin{aligned} I_n A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \cdots + 0 \cdot a_{1n} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{12} + \cdots + 0 \cdot a_{1n} & \cdots & 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{12} + \cdots + 1 \cdot a_{1n} \\ 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \cdots + 0 \cdot a_{2n} & 0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} + \cdots + 0 \cdot a_{2n} & \cdots & 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \cdots + 1 \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} + 0 \cdot a_{m2} + \cdots + 0 \cdot a_{mn} & 0 \cdot a_{m1} + 1 \cdot a_{m2} + \cdots + 0 \cdot a_{mn} & \cdots & 0 \cdot a_{m1} + 0 \cdot a_{m2} + \cdots + 1 \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= A$$

Definisi 2.14 [22] Matriks permutasi merupakan matriks yang terbentuk dari matriks identitas dengan mengubah urutan kolom-kolomnya. Banyaknya matriks permutasi yang diperoleh dari matriks identitas I_n adalah $n!$.

Contoh 2.14

Terdapat $3! = 6$ buah matriks yang diperoleh dari matriks identitas I_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.15 [22] Vektor e_j adalah vektor baris dengan n kolom yang kolom ke- j adalah 1 dan kolom lainnya adalah 0. Vektor e_j ditulis sebagai berikut.

$$e_j = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$$

Definisi 2.16 [22] Jika σ merupakan permutasi pada himpunan $N = \{1, 2, \dots, n\}$, maka $P_\sigma = \begin{bmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$ adalah matriks permutasi dengan $e_{\sigma(i)}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$

adalah vektor baris dengan n kolom yang ke $\sigma(i)$ adalah 1 dan kolom lainnya adalah 0

Contoh 2.15

Jika $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\sigma(1)=4, \sigma(2)=1, \sigma(3)=3, \sigma(4)=2$ maka

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ e_{\sigma(3)} \\ e_{\sigma(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{(4)} \\ e_{(1)} \\ e_{(3)} \\ e_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.4 [22] Jika $A = (a_{ij})$ adalah matriks yang berukuran $n \times p$ dan P_σ adalah matriks permutasi $n \times n$, maka hasil kali $P_\sigma A$ adalah matriks berukuran $n \times p$ yang elemen-elemennya adalah $a_{\sigma(i),j}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, p$. $P_\sigma A$ adalah A dengan permutasi σ pada barisnya

Bukti

$$P_\sigma A = \begin{bmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\sigma(1),1} & a_{\sigma(1),2} & \cdots & a_{\sigma(1),p} \\ a_{\sigma(2),1} & a_{\sigma(2),2} & \cdots & a_{\sigma(2),p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(n),1} & a_{\sigma(n),2} & \cdots & a_{\sigma(n),p} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.16

Diketahui $P_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, hitung $P_\sigma A$

Penyelesaian:

Permutasi dari P_σ adalah $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, yaitu $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=2$

$$\text{Maka } P_\sigma A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\sigma(1),1} & a_{\sigma(1),2} \\ a_{\sigma(2),1} & a_{\sigma(2),2} \\ a_{\sigma(3),1} & a_{\sigma(3),2} \end{bmatrix}$$