

## BAB II

### LANDASAN TEORI

#### 2.1 Himpunan *Crisp*

Secara intuitif pemahaman mengenai himpunan ialah sebagai suatu kumpulan atau koleksi obyek-obyek (konkret maupun abstrak) yang mempunyai kesamaan sifat tertentu. Suatu himpunan haruslah terdefinisi secara tegas, dalam arti bahwa untuk setiap obyek selalu dapat ditentukan secara tegas apakah obyek tersebut merupakan anggota himpunan itu atau tidak. Oleh karenanya himpunan semacam itu seringkali juga disebut himpunan tegas (*crisp*) [3].

##### Definisi 2.1 [4]

Suatu himpunan  $A$  dalam semesta  $X$  dapat dinyatakan dengan fungsi karakteristik  $\chi_A: X \rightarrow \{0,1\}$  yang didefinisikan oleh

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in A, \\ 0, & \text{jika } x \notin A, \end{cases}$$

Untuk setiap  $x \in X$ .

##### Contoh 2.1

Diberikan  $S=[1,2,3,4,5,6,7,8]$  dengan  $A=[1,3,5,7]$ , maka:

Nilai keanggotaan 1 pada  $A$ ,  $A = X_A[1] = 1$

Nilai keanggotaan 2 pada  $A$ ,  $A = X_A[2] = 0$

Nilai keanggotaan 3 pada  $A$ ,  $A = X_A[3] = 1$

Nilai keanggotaan 4 pada  $A$ ,  $A = X_A[4] = 0$

Nilai keanggotaan 5 pada  $A$ ,  $A = X_A[5] = 1$

Nilai keanggotaan 6 pada  $A$ ,  $A = X_A[6] = 0$

Nilai keanggotaan 7 pada  $A$ ,  $A = X_A[7] = 1$

Nilai keanggotaan 8 pada  $A$ ,  $A = X_A[8] = 0$

## 2.2 Himpunan Fuzzy

Himpunan *fuzzy* adalah cabang dari matematika yang tertua, yang mempelajari proses bilangan random : teori probabilitas, statistik matematik, teori informasi dan lainnya. *Fuzzy* mempunyai arti yaitu kabur atau tidak jelas [4].

Himpunan *fuzzy* merupakan himpunan yang keanggotaannya memiliki kebenaran atau kesamaran antara salah dan benar. Himpunan *fuzzy* didasarkan pada gagasan untuk memperluas jangkauan fungsi karakteristik, sedemikian hingga fungsi tersebut akan mencakup bilangan real pada interval  $[0,1]$ . Nilai keanggotannya menunjukkan bahwa suatu *item* tidak hanya bernilai benar atau salah, tetapi masih ada nilai-nilai yang terletak antara benar dan salah [5].

### 2.2.1 Fungsi Keanggotaan

Fungsi keanggotaan menyatakan derajat keanggotaan pada suatu himpunan. Nilai dari fungsi keanggotaan ini berada pada interval  $[0,1]$  dan dinyatakan dengan  $\mu_{\tilde{A}}: x \rightarrow [0,1]$ . Fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  bernilai 1 jika  $x$  anggota penuh dari himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$ , dan bernilai 0 jika  $x$  bukan merupakan anggota dari himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$ . Jika derajat keanggotaan berada pada interval  $(0,1)$ , misalnya  $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu$ , menyatakan  $x$  sebagai anggota himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  dengan derajat keanggotaan sebesar  $\mu$  [6].

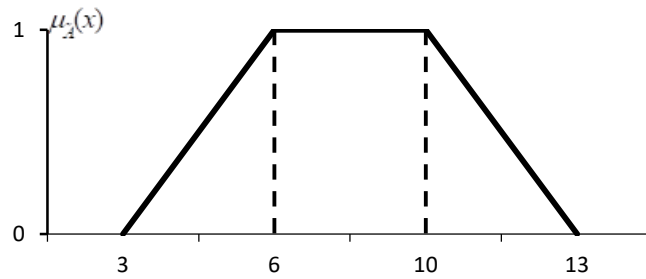
**Definisi 2.2 [4]** Himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  disebut normal jika terdapat paling sedikit satu anggota  $x \in X$  dengan  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ .

### Contoh 2.2

Diberikan himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  dalam semesta himpunan semua bilangan real  $\mathbb{R}$ , dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{3} & , 3 \leq x \leq 6 \\ 1 & , 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{13-x}{3} & , 10 \leq x \leq 13 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy  $\tilde{A}$  pada Contoh 2.2 dapat dipresentasikan dalam bentuk grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 2.1.



**Gambar 2.1** Fungsi keanggotaan himpunan fuzzy  $\tilde{A}$  Contoh 2.2

**Definisi 2.3 [4]** Pendukung (*support*) dari suatu himpunan fuzzy  $\tilde{A}$ , yang dilambangkan dengan  $Pend(\tilde{A})$ , adalah himpunan tegas yang memuat semua unsur dari semesta yang mempunyai derajat keanggotaan tak nol dalam  $\tilde{A}$ , yaitu

$$Pend(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

### Contoh 2.3

Pada Contoh 2.2 pendukung (*support*) dari himpunan fuzzy  $\tilde{A}$  adalah

$$\begin{aligned} Pend(\tilde{A}) &= \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \\ &= \{x \in X \mid 3 < x < 13\} \\ &= \{3, 13\} \end{aligned}$$

**Definisi 2.4 [4]** Tinggi (*height*) dari suatu himpunan fuzzy  $\tilde{A}$ , yang dilambangkan dengan  $Tinggi(\tilde{A})$ , didefinisikan sebagai

$$Tinggi(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}.$$

### Contoh 2.4

Pada Contoh 2.2 tinggi (*height*) dari himpunan fuzzy  $\tilde{A}$  adalah

$$\begin{aligned} \text{Tinggi}(\tilde{A}) &= \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\} \\ &= \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x) | 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup_{x \in X} [0, 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Definisi 2.5 [4]** *Teras (core) dari suatu himpunan fuzzy  $\tilde{A}$ , yang dilambangkan dengan  $\text{Teras}(\tilde{A})$ , adalah himpunan semua unsur dari semestanya yang mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1, yaitu*

$$\text{Teras}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

#### Contoh 2.5

Pada Contoh 2.2 *Teras*( $\tilde{A}$ ) dari himpunan fuzzy  $\tilde{A}$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \text{Teras}(\tilde{A}) &= \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid 6 \leq x \leq 10\} \\ &= \{6, 10\} \end{aligned}$$

**Definisi 2.6 [4]** *Potongan  $_{-\alpha}$  dari suatu himpunan fuzzy  $\tilde{A}$ , dilambangkan dengan  $a_{\alpha}$  merupakan himpunan tegas yang memuat semua elemen dari semesta dengan derajat keanggotaan dalam  $\tilde{A}$  yang lebih besar atau sama dengan  $\alpha$ , yaitu*

$$a_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ .

#### Contoh 2.6

Pada Contoh 2.2 diperoleh potongan  $\alpha$  dari himpunan fuzzy  $\tilde{A}$ , yaitu:

$$\text{Untuk } \alpha = 0 \text{ maka } A_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\} = \mathbb{R}$$

$$\text{Untuk } \alpha = 0.5 \text{ maka } A_{0.5} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 11\}$$

$$\text{Untuk } \alpha = 1 \text{ maka } A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leq x \leq 10\}$$

**Definisi 2.7 [4]** Himpunan fuzzy  $\tilde{A}$  dikatakan konveks jika memenuhi syarat:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

untuk setiap  $x_1, x_2 \in X$  dan  $\lambda \in [0,1]$ .

**Contoh 2.7**

Pada Contoh 2.2 nilai  $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$  dan  $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$  disajikan pada Tabel 2.1.

**Tabel 2.1** Nilai  $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$  dan  $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$

| $x_1$      | $x_2$      | $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ | $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ |               |                                                               |
|------------|------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------|---------------------------------------------------------------|
|            |            |                                                      | $\lambda = 0$                                   | $\lambda = 1$ | $0 < \lambda < 1$<br>$\lambda = \frac{1}{\alpha}, \alpha > 1$ |
| $x_1 = 0$  | $x_2 = 3$  | 0                                                    | 0                                               | 0             | $3 - \frac{3}{\alpha}$                                        |
| $x_1 = 0$  | $x_2 = 6$  | 0                                                    | 1                                               | 0             | $6 - \frac{6}{\alpha}$                                        |
| $x_1 = 0$  | $x_2 = 10$ | 0                                                    | 1                                               | 0             | $10 - \frac{10}{\alpha}$                                      |
| $x_1 = 0$  | $x_2 = 13$ | 0                                                    | 0                                               | 0             | $13 - \frac{13}{\alpha}$                                      |
| $x_1 = 3$  | $x_2 = 6$  | 0                                                    | 1                                               | 0             | $6 - \frac{3}{\alpha}$                                        |
| $x_1 = 3$  | $x_2 = 10$ | 0                                                    | 1                                               | 0             | $10 - \frac{7}{\alpha}$                                       |
| $x_1 = 3$  | $x_2 = 13$ | 0                                                    | 0                                               | 0             | $13 - \frac{10}{\alpha}$                                      |
| $x_1 = 6$  | $x_2 = 10$ | 1                                                    | 1                                               | 1             | $10 - \frac{4}{\alpha}$                                       |
| $x_1 = 6$  | $x_2 = 13$ | 0                                                    | 0                                               | 1             | $13 - \frac{7}{\alpha}$                                       |
| $x_1 = 10$ | $x_2 = 13$ | 0                                                    | 0                                               | 1             | $13 - \frac{3}{\alpha}$                                       |

Dari Tabel 2.1 terbukti bahwa himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  konveks karena nilai  $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$  untuk setiap  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  dan  $\lambda \in [0,1]$ .

### 2.3 Bilangan Fuzzy

dalam kehidupan sehari-hari konsep bilangan *fuzzy* muncul dalam bentuk besaran yang dinyatakan dengan bilangan yang tidak tegas, misalnya “kurang lebih 20”, “mendekati 20”, “sekitar 20”. Secara intuitif dapat diterima bahwa ungkapan “sekitar 20” dapat dinyatakan dengan suatu himpunan *fuzzy* pada semesta  $\mathbb{R}$ , dimana bilangan 20 mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1, bilangan-bilangan di sekitar 20 mempunyai derajat keanggotaan kurang dari 1, dan apabila terdapat bilangan yang semakin jauh dari 20 maka derajat keanggotaannya semakin mendekati 0 [4].

#### Definisi 2.8 [4]

Himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  dalam semesta himpunan semua bilangan real  $\mathbb{R}$  disebut sebagai bilangan *fuzzy* apabila memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. Himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  normal.
2. Pendukung ( $\tilde{A}$ ) terbatas.
3. Potongan  $-\alpha$  himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  berada pada interval tertutup dari  $\mathbb{R}$ .
4. Himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  konveks.

#### Contoh 2.8

Himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  pada Contoh 2.2 merupakan bilangan *fuzzy* karena memenuhi empat syarat yaitu:

1. Himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  normal

Pada Contoh 2.2, dapat dilihat karena paling sedikit satu anggota yang memiliki tinggi sama dengan 1 dikatakan himpunan *fuzzy* normal.

2. Mempunyai pendukung yang terbatas

Pada Contoh 2.5, diperoleh  $Pend(\tilde{A}) = \{3,13\}$  mempunyai pendukung yang terbatas.

3. Potongan  $-\alpha$  himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  berada pada interval tertutup dalam  $\mathbb{R}$

Pada Contoh 2.6, dapat dilihat bahwa himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  semua potongan  $-\alpha$  nya adalah tertutup dalam  $\mathbb{R}$  yaitu untuk setiap potongan  $-\alpha$  nya berada pada interval 3 dan 13.

4. Himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  konveks

Pada Contoh 2.7, dapat dilihat syarat untuk setiap  $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ . Untuk setiap  $x_1, x_2 \in X$  dan  $\lambda \in [0,1]$  terpenuhi, sehingga Contoh 2.6 dapat dikatakan himpunan *fuzzy*  $\tilde{A}$  memiliki bilangan *fuzzy* yang konveks.

## 2.4 Masalah Transportasi

Masalah transportasi adalah salah satu bentuk khusus dari masalah program linier. Masalah transportasi pertama dikemukakan oleh F.L. Hitchcock pada tahun 1941 yang dikenal dengan masalah distribusi Hitchcock. Masalah transportasi Hitchcock ini merupakan masalah pengaturan distribusi sumber–sumber penyediaan produk barang yang sejenis ke tempat–tempat yang membutuhkan produk secara optimal [8].

Masalah transportasi muncul ketika menentukan cara pengiriman (pendistribusian) suatu jenis barang dari beberapa sumber ke beberapa tujuan yang dapat meminimumkan biaya. Biasanya jumlah persediaan (*supply*) tetap, tetapi jumlah permintaan (*demand*) bervariasi. Rute pengiriman yang berbeda akan menghasilkan biaya kirim yang berbeda juga, maka tujuan pemecahan masalah transportasi ini yaitu untuk menentukan berapa banyak unit barang yang harus dikirim dari setiap tujuan sehingga permintaan dapat terpenuhi dari total biaya kirim yang minimum [9].

Ciri – ciri khusus masalah transportasi sebagai berikut [10]:

1. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu.

2. Kuantitas produk atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan diminta oleh setiap tujuan, besarnya tertentu.
3. Produk yang dikirim dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber.
4. Biaya pengiriman produk atau barang dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya tertentu.

#### 2.4.1 Model Masalah Transportasi

Model masalah transportasi digunakan untuk pendistribusian produk dari suatu sumber ke suatu tujuan. Parameter yang digunakan pada model masalah transportasi yaitu biaya, nilai permintaan, dan nilai persediaan. Model dalam masalah transportasi dapat digambarkan dalam tabel berikut [11]:

**Tabel 2.2** Model Masalah Transportasi

| Tujuan<br>Sumber       | 1                 | 2                 | ...      | n                 | Penawaran<br>(supply) |
|------------------------|-------------------|-------------------|----------|-------------------|-----------------------|
| 1                      | $x_{11}$ $c_{11}$ | $x_{12}$ $c_{12}$ | ...      | $x_{1n}$ $c_{1n}$ | $a_1$                 |
| 2                      | $x_{21}$ $c_{21}$ | $x_{22}$ $c_{22}$ | ...      | $x_{2n}$ $c_{2n}$ | $a_2$                 |
| $\vdots$               | $\vdots$          | $\vdots$          | $\ddots$ | $\vdots$          | $\vdots$              |
| m                      | $x_{m1}$ $c_{m1}$ | $x_{m2}$ $c_{m2}$ | ...      | $x_{mn}$ $c_{mn}$ | $a_m$                 |
| Permintaan<br>(demand) | $b_1$             | $b_2$             | ...      | $b_n$             |                       |

Secara umum masalah transportasi diformulasikan sebagai berikut [7]:

$$\text{Minimumkan } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Dengan batasan:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ (batas persediaan)}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{batas permintaan})$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Dengan keterangan:

|          |                                                               |
|----------|---------------------------------------------------------------|
| $Z$      | : Biaya total transportasi                                    |
| $x_{ij}$ | : Banyaknya barang yang dikirim dari sumber $i$ ke tujuan $j$ |
| $c_{ij}$ | : Biaya pengiriman per unit dari sumber $i$ ke tujuan $j$     |
| $a_i$    | : Banyak persediaan pada sumber $i$                           |
| $b_j$    | : Banyak permintaan dari tujuan $j$                           |
| $m$      | : Banyaknya sumber                                            |
| $n$      | : Banyaknya tujuan                                            |

Dalam kehidupan nyata, kondisi total penawaran sama dengan total permintaan tidak selalu terpenuhi, banyak juga terjadi kondisi dimana jumlah supply lebih besar dibandingkan dengan demand, atau sebaliknya. Masalah ini disebut masalah transportasi tidak seimbang ( $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$ )

**Teorema 2.1 [12]** *Masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal jika dan hanya jika merupakan masalah transportasi seimbang.*

**Bukti:** Diketahui masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal. Misalkan

$\{x_{ij} \geq 0 | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$  solusi fisibel awal. Berarti memenuhi kendala

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_i, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_j, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ untuk semua } i \text{ dan } j$$

Sehingga diperoleh,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i \text{ dan } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j$$

$$\text{Jadi, } \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Lalu diketahui masalah transportasi seimbang yaitu  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ . Misalkan  $x_{ij} = \lambda_i b_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$  dimana  $\lambda_i$  adalah factor proporsional untuk sumber  $i$  dan *supply* terdistribusikan semua.

$$\text{Karena } x_{ij} = \lambda_i b_j \text{ maka } \sum_{i=1}^m x_{ij} = \lambda_i \sum_{j=1}^n b_j, \text{ lebih lanjut}$$

$$x_{ij} = \lambda_i b_j = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j} b_j$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j} b_j \right) = a_i, i = 1, 2, \dots, m \text{ dan}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^m \left( \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j} b_j \right) = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Hal ini berarti

$\{x_{ij} \geq 0 | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$  merupakan solusi fisibel awal.

Jadi masalah transportasi harus dalam kondisi seimbang ( $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ ) untuk memperoleh solusi fisibel awal.

#### 2.4.1 Metode Penyelesaian Masalah Transportasi

Pada umumnya masalah transportasi diselesaikan dengan dua tahap, tahap pertama yaitu mencari solusi fisibel awal untuk menentukan alokasi distribusi awal agar seluruh kapasitas sumber terdistribusikan ke seluruh tujuan, dan pada tahap kedua yaitu pengujian optimalitas untuk mengetahui seluruh total biaya transportasi telah minimum.

Untuk menyelesaikan masalah transportasi harus diselesaikan dengan langkah-langkah berikut [13]:

1. Menyusun tabel transportasi

Tabel transportasi menunjukkan sumber mana barang berasal dan kemana tujuan barang dikirim.

## 2. Menyusun tabel awal

Tabel awal menunjukkan informasi biaya transportasi dari setiap sumber dan besar permintaan. Pada langkah ini harus dipastikan masalah transportasi tersebut adalah masalah transportasi seimbang. Jika belum seimbang, harus diseimbangkan terlebih dahulu dengan menambahkan variabel *dummy*.

## 3. Pengalokasian

Pengalokasian dilakukan berdasarkan metode yang ada atau yang akan digunakan dengan menentukan *initial basis* awal yang digunakan untuk penyelesaian awal dalam masalah transportasi. Ada beberapa metode yang biasanya digunakan dalam menyelesaikan masalah transportasi antara lain Metode Sudut Barat Laut (*North West Corner Rule*), Metode Biaya terendah (*Least Cost Rule*), dan *Vogel's Approximation Method* (VAM).

## 4. Optimalisasi

Optimalisasi yaitu langkah melakukan pengujian optimalitas untuk mengetahui apakah alokasi tersebut sudah optimal atau belum. Secara matematis, pengujian ini dilakukan untuk menjamin nilai fungsi tujuan telah tercapai. Terdapat dua metode untuk melakukan pengujian yaitu dengan menggunakan metode *Stepping Stone* atau *Modified Distribution* (MODI) [9]. Jika belum optimal dilakukan revisi untuk sel yang masih memungkinkan untuk direvisi.