

BAB II

TEORI PENUNJANG

Pada bab ini dibahas teori-teori dasar yang meliputi, himpunan *fuzzy*, bilangan *fuzzy* dan teori permainan.

2.1 Himpunan Fuzzy

Himpunan adalah suatu kumpulan atau koleksi objek-objek (konkret maupun abstrak) yang mempunyai sifat tertentu [3]. Sebelum memahami sebuah himpunan yang bersifat abstrak (*fuzzy*), akan dikenalkan pemahaman mengenai himpunan tegas (*crisp set*).

Himpunan tegas adalah suatu kumpulan atau koleksi obyek-obyek yang dapat didefinisikan dengan jelas. Dengan kata lain untuk setiap obyek dapat ditentukan secara tegas apakah obyek tersebut merupakan anggota himpunan atau bukan. Cara untuk menyatakan suatu himpunan tegas adalah dengan menggunakan apa yang disebut fungsi karakteristik, yaitu fungsi dari himpunan semesta X ke himpunan $\{0,1\}$ [4].

Definisi 2.1 [4] *Diberikan suatu himpunan tegas A dalam himpunan semesta X . Untuk setiap x anggota himpunan semesta X dapat dinyatakan dengan fungsi karakteristik $\gamma_A : X \rightarrow \{0,1\}$ yang didefinisikan dengan aturan:*

$$\gamma_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Contoh 2.1

Diberikan himpunan A dalam himpunan semesta $X = \{0,6,12\}$ dan $A = \{6,12\}$, maka:

Nilai keanggotaan bilangan 6 pada himpunan A , $\gamma_A(6) = 1$ karena $6 \in A$

Nilai keanggotaan bilangan 12 pada himpunan A , $\gamma_A(12) = 1$ karena $12 \in A$

Nilai keanggotaan bilangan 0 pada himpunan A , $\gamma_A(0) = 0$ karena $0 \notin A$

Definisi 2.2 [4] Suatu himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian (subhimpunan) dari himpunan B , dengan notasi $A \subseteq B$, jika setiap anggota dari himpunan A juga merupakan anggota dari himpunan B .

Contoh 2.2 Diberikan $\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ adalah bilangan asli}\}$ dan $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ adalah bilangan real}\}$, karena bilangan asli tentu berada pada bilangan real, maka berlaku bilangan sebagai subhimpunan dari bilangan real $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

Tidak setiap himpunan dapat dinyatakan dalam himpunan tegas (*crisp*), misalnya himpunan dari sekumpulan orang, himpunan tinggi badan, himpunan tingkat kecerdasan, dan lain sebagainya. Untuk mengatasi permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas itu, Zadeh mengaitkan dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Fungsi itu disebut fungsi keanggotaan dan nilai fungsi itu disebut derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan itu, yang selanjutnya disebut himpunan *fuzzy* [4]. Himpunan *fuzzy* dilambangkan dengan $\tilde{A}$.

Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan real dalam selang tertutup $[0,1]$. Dengan perkataan lain, fungsi keanggotaan dari suatu himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dalam semesta X adalah pemetaan $\mu_{\tilde{A}}$ dari X ke selang $[0,1]$, yaitu $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$. Nilai fungsi $\mu_{\tilde{A}}$ menyatakan derajat keanggotaan $x \in X$ dalam himpunan kabur $\tilde{A}$. Nilai fungsi sama dengan 1 menyatakan keanggotaan penuh, dan nilai fungsi sama dengan 0 menyatakan sama sekali bukan anggota himpunan *fuzzy* tersebut. Maka himpunan tegas juga dapat dipandang sebagai kejadian khusus dari himpunan *fuzzy*, yaitu himpunan *fuzzy* yang fungsi keanggotaannya hanya bernilai 0 atau 1 saja [4].

Menurut [3], ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam memahami logika *fuzzy*, yaitu:

a. Variabel *fuzzy*

Variabel (atribut) adalah lambang yang digunakan untuk mewakili anggota sembarang dari suatu semesta pembicaraan. Variabel tidak harus mewakili angka saja tetapi juga dapat mewakili benda atau tempat. Variabel *fuzzy* merupakan variabel yang hendak dibahas dalam suatu sistem *fuzzy*. Contoh: umur, temperatur, permintaan, IPK.

b. Himpunan *Fuzzy*

Himpunan fuzzy memiliki 2 atribut:

1. Linguistik, yaitu penamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami, sebagai contoh: rendah, sedang dan tinggi.
2. Numerik, yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel seperti: 40, 25, 50, dsb.

c. Semesta Pembicaraan

Semesta pembicaraan adalah himpunan yang memuat seluruh objek yang akan menjadi pembicaraan. Semesta pembicaraan merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Adakalanya nilai semesta pembicaraan ini tidak dibatasi batas atasnya.

d. Domain

Domain himpunan fuzzy adalah keseluruhan nilai yang diizinkan dalam semesta pembicaraan dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan *fuzzy*. Seperti halnya dengan semesta pembicaraan, domain merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan.

Definisi 2.3 [4] *Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam himpunan semesta X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$*

dimana $\mu_{\tilde{A}}$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yang merupakan suatu pemetaan dari himpunan semesta X ke interval tertutup

$[0,1]$ dan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan fuzzy $\tilde{A}$.

Contoh 2.3 Diberikan semesta himpunan $X = \{15, 25, 34\}$ misalkan $\tilde{A}$ adalah temperature normal untuk variabel temperatur ruang dan fungsi keanggotaannya diberikan sebagai berikut :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \text{ untuk } x = 15$$

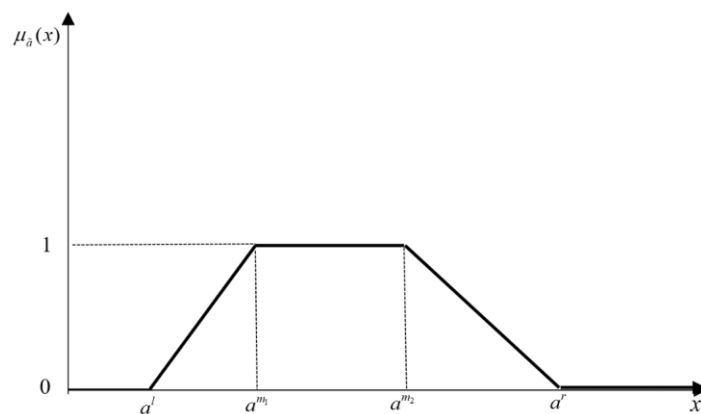
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \text{ untuk } x = 25$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.375, \text{ untuk } x = 32$$

himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dapat dinyatakan dengan $\tilde{A} = \{(15;0), (24;1), (32;0.375)\}$.

Dalam himpunan fuzzy, terdapat beberapa fungsi keanggotaan yaitu fungsi keanggotaan linier, fungsi keanggotaan segitiga, fungsi keanggotaan *trapezoidal*, fungsi keanggotaan Gauss, dan fungsi keanggotaan Cauchy. Pada ulasan selanjutnya, pada tugas akhir ini hanya dibatasi pada pembahasan fungsi keanggotaan *trapezoidal* yaitu:

Definisi 2.4 [4] Suatu fungsi keanggotaan himpunan fuzzy disebut fungsi keanggotaan *trapezoidal* jika mempunyai empat buah parameter, yaitu $a^l, a^{m_1}, a^{m_2}, a^r \in \mathbb{R}$ dengan $a^l < a^{m_1} < a^{m_2} < a^r$,



Gambar 2.1 Fungsi keanggotaan *trapezoidal* fuzzy

dan memenuhi aturan :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0; & \text{if } x < a^l \\ \frac{x - a^l}{a^{m_1} - a^l}; & \text{if } a^l < x \leq a^{m_1} \\ 1; & \text{if } a^{m_1} \leq x \leq a^{m_2} \\ \frac{a^r - x}{a^r - a^{m_2}}; & \text{if } a^{m_2} \leq x \leq a^r \\ 0; & \text{if } x > a^r \end{cases}$$

Contoh 2.4 Diberikan himpunan *fuzzy* temperatur normal untuk variabel temperatur ruang $\tilde{A} = \{15, 24, 27, 35\}$ dengan fungsi keanggotaan $x \in X$ dapat ditulis

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0; & \text{if } x \leq 15 \\ \frac{x - 15}{9}; & \text{if } 15 < x \leq 24 \\ 1; & \text{if } 24 \leq x \leq 27 \\ \frac{35 - x}{8}; & \text{if } 27 \leq x \leq 35 \\ 0; & \text{if } x > 35 \end{cases}$$

Selanjutnya untuk mengetahui derajat keanggotaan tiap elemen misal $X = \{15, 25, 32\}$, maka akan diperoleh hasil :

$$\mu_{\tilde{A}}(15) = 0; \mu_{\tilde{A}}(25) = 1; \mu_{\tilde{A}}(32) = 0.375.$$

Pada fungsi keanggotaan di atas apabila $a^{m_1} = a^{m_2}$ fungsi keanggotaan *trapezoidal* tereduksi menjadi fungsi keanggotaan segitiga, dan jika $a^l = a^{m_1} = a^{m_2} = a^r$ fungsi keanggotaan *trapezoidal* tereduksi menjadi nilai real (crisp). Dengan kata lain fungsi keanggotaan segitiga dan bilangan real adalah kasus khusus dari fungsi keanggotaan *trapezoidal*.

Definisi 2.5 [4] *Pendukung (support) dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$, adalah himpunan tegas yang memuat semua unsur dari semesta yang mempunyai derajat keanggotaan tak nol dalam $\tilde{A}$, yaitu*

$$Pend(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Contoh 2.5

Pada contoh 2.4 pendukung (support) dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yaitu :

$$\begin{aligned} Pend(\tilde{A}) &= \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \\ &= \{x \in X \mid 15 < x < 35\} \\ &= (15, 35) \end{aligned}$$

Definisi 2.6 [4] *Tinggi (height) dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ didefinisikan sebagai*

$$Tinggi(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}.$$

Contoh 2.6

Pada contoh 2.4 diperoleh $Tinggi(\tilde{A}) = 1$

Definisi 2.7 [4] *Himpunan fuzzy yang tingginya sama dengan 1 disebut himpunan fuzzy normal.*

Contoh 2.7

pada contoh 2.4 diperoleh $Tinggi(\tilde{A}) = 1$ maka himpunan fuzzy pada contoh 2.4 adalah himpunan fuzzy normal.

Definisi 2.8 [4] *Teras (core) dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$, adalah himpunan semua unsur dari semestanya yang mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1, yaitu*

$$Teras(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Contoh 2.8

pada contoh 2.4 diperoleh

$$\begin{aligned} Teras(\tilde{A}) &= \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid 24 \leq x \leq 27\} \\ &= [24, 27] \end{aligned}$$

Definisi 2.9 [5] Himpunan fuzzy $\tilde{A} \subseteq \mathbb{R}$ disebut konveks jika dan hanya jika memenuhi syarat :

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\},$$

Untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan $\lambda \in [0,1]$.

Contoh 2.9

Pada contoh 2.4 nilai dari $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ dan $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ disajikan pada tabel 2.1

Tabel 2.1 nilai $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ dan $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$

x_1	x_2	$\min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$	$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$		
			$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$0 < \lambda < 1,$ $\lambda = \frac{1}{a}, a > 1$
$x_1 \leq 15$	$x_2 \leq 15$	0	0	0	0
$x_1 \leq 15$	$15 < x_2 \leq 24$	0	$\frac{x_2 - 15}{9}$	0	$\frac{35 - x_2}{8a}(a-1)$
$x_1 \leq 15$	$24 < x_2 \leq 27$	0	1	0	1
$x_1 \leq 15$	$27 < x_2 < 35$	0	$\frac{35 - x_2}{8}$	0	$\frac{x_2 - 15}{9a}(a-1)$
$x_1 \leq 15$	$x_2 \geq 35$	0	0	0	0
$15 < x_1 \leq 24$	$x_2 \leq 15$	0	0	$\frac{x_1 - 15}{9}$	$\frac{x_1 - 15}{9a}$
$15 < x_1 \leq 24$	$15 < x_2 \leq 24$	$\min\left\{\frac{x_1 - 15}{9}, \frac{x_2 - 15}{9}\right\}$	$\frac{x_2 - 15}{9}$	$\frac{x_1 - 15}{9}$	$\frac{x_1 - 15}{9a} + \frac{x_2 - 15}{9a}(a-1)$
$15 < x_1 \leq 24$	$24 < x_2 \leq 27$	$\frac{x_1 - 15}{9}$	1	$\frac{x_1 - 15}{9}$	$\frac{x_1 - 15}{9a} + \frac{1}{a}(a-1)$
$15 < x_1 \leq 24$	$27 < x_2 < 35$	$\min\left\{\frac{x_1 - 15}{9}, \frac{35 - x_2}{8}\right\}$	$\frac{35 - x_2}{8}$	$\frac{x_1 - 15}{9}$	$\frac{x_1 - 15}{9a} + \frac{35 - x_2}{8a}(a-1)$
$15 < x_1 \leq 24$	$x_2 \geq 35$	0	0	$\frac{x_1 - 15}{9}$	$\frac{x_1 - 15}{9a}$
$24 < x_1 \leq 27$	$x_2 \leq 15$	0	0	1	$\frac{1}{a}$
$24 < x_1 \leq 27$	$15 < x_2 \leq 24$	$\frac{x_2 - 15}{9}$	$\frac{x_2 - 15}{9}$	1	$\frac{1}{a} + \frac{x_2 - 15}{9a}(a-1)$
$24 < x_1 \leq 27$	$24 < x_2 \leq 27$	1	1	1	1
$24 < x_1 \leq 27$	$27 < x_2 < 35$	$\frac{35 - x_2}{8}$	$\frac{35 - x_2}{8}$	1	$\frac{1}{a} + \frac{35 - x_2}{8a}(a-1)$
$24 < x_1 \leq 27$	$x_2 \geq 35$	0	0	1	$\frac{1}{a}$
$27 < x_1 < 35$	$x_2 \leq 15$	0	0	$\frac{35 - x_1}{8}$	$\frac{35 - x_1}{8a}$

$27 < x_1 < 35$	$15 < x_2 \leq 24$	$\min\left\{\frac{35-x_1}{8}, \frac{x_2-15}{9}\right\}$	$\frac{x_2-15}{9}$	$\frac{35-x_1}{8}$	$\frac{35-x_1}{8a} + \frac{x_2-15}{9a}(a-1)$
$27 < x_1 < 35$	$24 < x_2 \leq 27$	$\frac{35-x_1}{8}$	1	$\frac{35-x_1}{8}$	$\frac{35-x_1}{8a} + \frac{1}{a}(a-1)$
$27 < x_1 < 35$	$27 < x_2 < 35$	$\min\left\{\frac{35-x_1}{8}, \frac{35-x_2}{8}\right\}$	$\frac{35-x_2}{8}$	$\frac{35-x_1}{8}$	$\frac{35-x_1}{8a} + \frac{35-x_2}{8a}(a-1)$
$27 < x_1 < 35$	$x_2 \geq 35$	0	0	$\frac{35-x_1}{8}$	$\frac{35-x_1}{8a}$
$x_1 \geq 35$	$x_2 \leq 15$	0	0	0	0
$x_1 \geq 35$	$15 < x_2 \leq 24$	0	$\frac{x_2-15}{9}$	0	$\frac{x_2-15}{9a}(a-1)$
$x_1 \geq 35$	$24 < x_2 \leq 27$	0	1	0	$\frac{1}{a}(a-1)$
$x_1 \geq 35$	$27 < x_2 < 35$	0	$\frac{35-x_2}{8}$	0	$\frac{35-x_2}{8a}(a-1)$
$x_1 \geq 35$	$x_2 \geq 35$	0	0	0	0

Dari Tabel 2.1 diperoleh nilai $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$, untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan $\lambda \in [0,1]$. oleh karena itu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ merupakan konveks.

Definisi 2.10 [6] potongan- α dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang dilambangkan dengan $\tilde{A}(\alpha)$ adalah himpunan tegas yang memuat semua elemen dari semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\tilde{A}$ yang lebih besar atau sama dengan α yaitu:

$$\tilde{A}(\alpha) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Dimana α adalah suatu bilangan dalam selang tertutup $[0,1]$

Contoh 2.10 Berdasarkan contoh 2.4 diperoleh potongan α dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$, yaitu :

Untuk $\alpha = 0$, maka $\tilde{A}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 15 \leq x \leq 35\}$

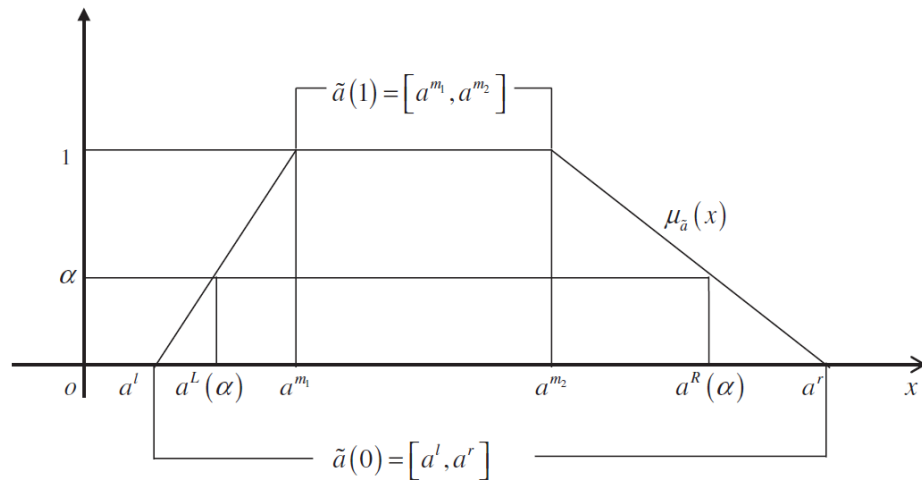
Untuk $\alpha = 1$, maka $\tilde{A}(1) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 24 \leq x \leq 27\}$

Pada himpunan trapezoidal fuzzy potongan α berbentuk interval dan dapat dinotasikan $\tilde{A}(\alpha) = [a^L(\alpha), a^R(\alpha)]$ dengan $a^L(\alpha) =$

$\alpha a^{m_1} + (1-\alpha)a^l$ dan $a^R(\alpha) = \alpha a^{m_2} + (1-\alpha)a^r$. Dari contoh 2.8 dapat diketahui bahwa nilai dari $\tilde{A}(1) = [a^L(1), a^R(1)] = [a^{m_1}, a^{m_2}]$ dan $\tilde{A}(0) = [a^L(0), a^R(0)] = [a^l, a^r]$. Berdasarkan operasi antar interval [7] didapatkan :

$$\begin{aligned} [a^L(\alpha), a^R(\alpha)] &= [\alpha a^{m_1} + (1-\alpha)a^l, \alpha a^{m_2} + (1-\alpha)a^r] \\ &= \alpha [a^{m_1}, a^{m_2}] + (1-\alpha)[a^l, a^r] \\ &= \alpha \tilde{A}(1) + (1-\alpha)\tilde{A}(0) \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa setiap potongan α dari sembarang himpunan *trapezoidal fuzzy* dapat langsung diperoleh dari potongan 1 dan potongan 0 dari himpunan itu sendiri.



Gambar 2.2 Sebarang potongan- α dari sebuah himpunan

$$\text{trapezoidal fuzzy } \tilde{A} = (a^l, a^{m_1}, a^{m_2}, a^r)$$

karena potongan alfa dari bilangan trapezoidal berbentuk interval, selanjutnya akan dibahas tentang perbandingan antar bilangan interval.

Karena potongan alfa dari bilangan trapezoidal berbentuk interval, selanjutnya akan dibahas tentang perbandingan antar bilangan interval seperti yang dibahas oleh [8] sebagai berikut:

Kasus 1

1. Interval Saling Lepas

Misalkan $B = [b_L, b_R], C = [c_L, c_R] \in I(\mathbb{R})$, perbandingan antar bilangan interval didefinisikan hubungan urutan transitif antar interval sebagai; B dengan tegas kurang dari C jika dan hanya jika $b_R < c_L$ dan dinotasikan dengan $B < C$. Relasi ini berlaku pula untuk $C < B$.

2. Interval Bersarang

Misal $B = [b_L, b_R], C = [c_L, c_R] \in I(\mathbb{R})$ dengan $b_L \leq c_L < c_R \leq b_R$.

kemudian C termuat di dalam B dan dinotasikan dengan $C \subseteq B$ maka dapat dikatakan bahwa B bersarang di A .

2.2 Bilangan Fuzzy

Selanjutnya akan dibahas tentang bilangan *fuzzy*. Bilangan *fuzzy* diartikan sebagai bilangan tidak tepat, misalnya pada kasus jarak “kurang lebih 12 km”, sehingga dapat dikatakan jarak 12 Km mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1, sedangkan bilangan lain memiliki derajat keanggotaan pada interval $[0,1)$. Semakin jauh bilangan tersebut dari 12 maka derajat keanggotaannya semakin mendekati 0.

Definisi 2.11 *Bilangan fuzzy didefinisikan sebagai himpunan fuzzy dalam semesta himpunan semua bilangan real yang memenuhi empat sifat berikut:*

1. *Normal*
2. *Mempunyai pendukung yang terbatas*
3. *Semua potongan- α -nya adalah selang tertutup dalam $\mathbb{R}$*
4. *Konveks*

Contoh 2.11 Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada Contoh 2.4 merupakan bilangan fuzzy karena memenuhi empat syarat yaitu:

1. Normal

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada Contoh 2.4 adalah normal karena telah dibuktikan pada Contoh 2.7

2. Mempunyai pendukung yang terbatas

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada Contoh 2.4 mempunyai pendukung yang terbatas karena telah dibuktikan pada Contoh 2.5 diperoleh $Pend(\tilde{A}) = \{x \in X \mid 15 < x < 35\}$

3. Semua potongan- α -nya adalah selang tertutup dalam $\mathbb{R}$

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada Contoh 2.4 semua potongan- α berada pada selang tertutup dalam $\mathbb{R}$ karena telah dibuktikan pada Contoh 2.10 bahwa untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, semua potongan- α berada pada selang tertutup dalam $\mathbb{R}$.

4. Konveks

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada Contoh 2.5 adalah konveks karena telah dibuktikan pada Contoh 2.9.

Selanjutnya akan akan dikenalkan pul tentang fungsi peringkat pada bilangan *trapezoidal fuzzy*. Fungsi peringkat adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan fuzzy ke dalam bilangan real.

Definisi 2.12 [9] *untuk setiap $\tilde{A} = (a^l, a^{m_1}, a^{m_2}, a^r)$ di dalam $F(\mathbb{R})$, fungsi peringkat $R: F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan trapezoidal fuzzy ke dalam bilangan real dengan suatu relasi urutan dan didefinisikan sebagai berikut:*

$$R(\tilde{A}) = m + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)$$

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(a^{m_1} + a^{m_2}) + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)$$

Dengan α, β masing-masing adalah sebaran kiri $\alpha = (a^{m_1} - a^l)$ dan sebaran kanan $\beta = (a^r - a^{m_2})$ dari bilangan trapezoidal fuzzy.

Contoh 2.12

Misal sebuah bilangan *trapezoidal fuzzy* $\tilde{A} = (1, 4, 5, 6)$ maka fungsi rangking dari $\tilde{A}$ didefinisikan sebagai :

$$\begin{aligned}
R(\tilde{A}) &= \frac{1}{2}(4+5) + \frac{1}{4}((6-5) - (4-1)) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Untuk setiap dua bilangan *trapezoidal fuzzy* $\tilde{A} = (a^l, a^{m_1}, a^{m_2}, a^r)$ dan $\tilde{B} = (b^l, b^{m_1}, b^{m_2}, b^r)$ dalam $F(\mathbb{R})$ mengikuti aturan sebagai berikut [10]:

1. $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $R(\tilde{A}) \leq R(\tilde{B})$
2. $\tilde{A} \geq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $R(\tilde{A}) \geq R(\tilde{B})$
3. $\tilde{A} \approx \tilde{B}$ jika dan hanya jika $R(\tilde{A}) \approx R(\tilde{B})$

2.3 Teori Permainan

Teori permainan (*Game Theory*) [1] adalah suatu pendekatan matematis untuk merumuskan situasi persaingan dan konflik antara berbagai kepentingan. Titik perhatian dalam melakukan analisis keputusan dengan menggunakan teori permainan ini adalah tingkah laku strategis pemain atau pengambil keputusan. Langkah strategis yang digunakan adalah berupa strategi dari tiap pemain untuk menjadi pemenang dalam permainan. Jika seorang pemain menggunakan strategi X , maka pemain lainnya akan menentukan suatu strategi Y untuk mengantisipasi strategi X dari pemain lawan. Hal tersebut akan berlaku sebaliknya atau terjadi timbal balik.

Keputusan yang dilakukan oleh satu pemain bisa disebabkan oleh keputusan yang dilakukan oleh pemain lawannya. Masalahnya, seorang pemain bisa merencanakan berbagai alternatif keputusan, sehingga pemain lawan pun akan menyediakan berbagai alternatif keputusan untuk antisipasi.

Keuntungan bagi yang satu merupakan kerugian bagi yang lain. Tiap peserta memilih dan melaksanakan strategi-strategi yang ia percaya akan menghasilkan kemenangan. Setiap pemain dianggap mempunyai kemampuan untuk mengambil keputusan secara bebas dan rasional.

Definisi 2.13 [11] Misal $S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ dan $S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ adalah himpunan-himpunan strategi untuk pemain 1 dan pemain 2 maka matriks permainan di definisikan sebagai :

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

dengan elemen-elemennya yang merupakan besarnya nilai pembayaran yang bersesuaian dengan strategi yang digunakan oleh dua pihak.

Contoh 2.13

Dimisalkan persaingan antara dua pemain dimana pemain 1 memiliki sebanyak m strategi dan pemain 2 memiliki n strategi untuk dengan nilai persaingan tiap strategi adalah sebagai berikut:

		Pemain 2			
		y_1	y_2	$\dots$	y_n
Pemain 1	x_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Maka matriks pembayaran (*payoff*) dapat diformulasikan dengan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan contoh 2.13 diatas, dapat dijelaskan dasar-dasar teori permainan sebagai berikut :

1. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$, menunjukkan hasil-hasil atau *pay-off* yang berupa bilangan real dari strategi strategi permainan yang berbeda-beda. Bilangan positif menunjukkan keuntungan bagi pemain baris (*maximizing player*) dan kerugian bagi pemain kolom (*minimizing player*) dan juga sebaliknya
2. $x_1, x_2, \dots, x_m$ dan $y_1, y_2, \dots, y_n$ merupakan alternatif strategi-strategi yang dimiliki oleh masing-masing pemain 1 dan 2. Suatu strategi permainan adalah rangkaian rencana yang menyeluruh dari pemain sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pesaing.

3. Nilai permainan adalah hasil yang diperkirakan permainan atau rata-rata *payoff* sepanjang permainan. Suatu permainan dikatakan adil apabila nilainya sama dengan nol.
4. Tujuan dari model permainan adalah mengidentifikasi strategi mana yang optimal untuk setiap pemain.

Dalam teori permainan lawan disebut sebagai pemain (*player*). Hasil (*pay-off*) dari sejumlah permainan diringkaskan sebagai fungsi dari strategi yang berbeda-beda dari setiap pemain. Faktor-faktor yang mempengaruhi penggunaan teori permainan yaitu :

1. Banyaknya pemain
2. Jumlah keuntungan dan kerugian
3. Banyaknya strategi yang dilakukan dalam permainan

Jika jumlah kerugian dan keuntungan dari permainannya adalah nol, disebut sebagai permainan sejumlah nol (*zero-sum game*), sebaliknya jika nilai permainan antara dua pemain berbeda maka disebut sebagai permainan berjumlah bukan nol (*non-zero-sum game*). Pada tugas akhir ini yang akan dibahas adalah model *two person zero-sum game*.

2.1 *Two-Person Zero-Sum Game*

Teori permainan dengan jumlah nol dari dua pemain, merupakan interaksi antara dua pemain yang saling bersaing terhadap masing-masing kepentingan. Keuntungan yang didapat oleh salah satu pemain merupakan kekalahan bagi pemain lainnya, sehingga bila dijumlahkan akan sama dengan nol. *Two Person Zero Sum Game* dilambangkan dengan $G = (S^m, S^n, A)$, S^m adalah ruang strategi untuk pemain 1, S^n adalah ruang strategi untuk pemain 2 dan A adalah matriks pembayaran. Dalam menentukan strategi optimal untuk *Two Person Zero Sum Game* terdapat dua strategi yaitu :

a. Strategi Murni

Pada Strategi Murni masing-masing pemain hanya mempunyai 1 satu strategi. Pemain 1 (pemain baris) berprinsip untuk memaksimumkan nilai pembayaran, karena nilai pembayaran pemain 1 bergantung pada nilai pembayaran yang dipilih oleh pemain 2 dan pemain 2 berprinsip meminimalkan nilai pembayaran maka strategi optimal untuk pemain 1 adalah *maksimin*. Bagi pemain 2 (pemain kolom) berprinsip untuk minimum nilai pembayaran, karena nilai pembayaran pemain 2 bergantung pada nilai pembayaran yang dipilih oleh pemain 1 dan pemain 1 berprinsip memaksimumkan nilai pembayaran maka strategi optimal untuk pemain 2 adalah *minimaks*. Berikut diberikan pengertian *maksimin* dan *minimaks*, dengan:

1. *Maksimin* (strategi pemain 1) adalah mencari nilai maksimum dari nilai-nilai minimum yang mungkin dipilih oleh pemain 2
2. *Minimaks* (strategi pemain 2) adalah mencari nilai minimum dari nilai-nilai maksimum yang mungkin dipilih oleh pemain 1

Jika dalam hal ini diperoleh nilai *maksimin* = *minimaks* maka titik ini disebut titik keseimbangan atau titik sadel (*saddle point*). Dan titik sadel akan menjadi nilai pembayaran kemudian strategi yang berkorespondensi dengan titik sadle tersebut akan menjadi strategi yang digunakan pada permainan.

Contoh 2.14 Dimisalkan persaingan antara dua pemain dimana masing-masing pemain memiliki dua strategi, dengan nilai persaingan tiap strategi adalah sebagai berikut:

		Pemain 2		
		strategi 1	strategi 2	<i>Maksimin</i>
Pemain 1	strategi 1	6	4	4
	Strategi2	-3	2	-3

Minimaks	6	4
----------	---	---

Dari analisa diatas diperoleh nilai *saddle point* adalah 4. Sehingga pada permainan diatas dimenangkan oleh pemain 1 dengan nilai permainan adalah 4 dengan pemain 1 menggunakan strategi 1 dan pemain 2 menggunakan strategi 2.

Theorema 2.1 Teorema fundamental *two person zero sum games* . Untuk setiap permainan $G = (S^m, S^n, A)$, nilai dari $\max_{x \in S^m} \min_{y \in S^n} x^T A y = E(x^*, y)$ dan

$\min_{y \in S^n} \max_{x \in S^m} x^T A y = E(x, y^*)$ keduanya ada dan bernilai sama

Bukti

Strategi x^* adalah strategi terbaik yang mungkin dipilih oleh pemain 1, sedangkan y^* adalah strategi terbaik yang mungkin dipilih oleh pemain 2. Untuk membuktikan kebenaran theorema di atas ditetapkan nilai permainan $v = E(x^*, y^*)$ sedemikian sehingga

$$E(x^*, y) \geq E(x^*, y^*) \geq E(x, y^*) \quad (i)$$

Dapat dilihat bahwa ruas kiri dari ketidaksamaan (i) dibaca sebagai :

$$E(x^*, y) \geq v \quad \text{untuk seluruh strategi } y$$

Ini berarti bahwa jika pemain 1 memilih strategi x^* , maka strategi y apa pun yang dipilih oleh pemain 2, pembayaran yang diharapkan kepada pemain 1 tidak akan pernah kurang dari v . Lagi pula, tidak mungkin bagi pemain 1 untuk mendapat pembayaran yang lebih besar dari v . Untuk melihat mengapa demikian andaikan terdapat suatu strategi x^{**} yang dapat dipilih oleh pemain 1 sedemikian sehingga

$$E(x^{**}, y) \geq v \quad \text{untuk seluruh strategi } y$$

Kemudian secara khusus

$$E(x^{**}, y^*) \geq v$$

Tetapi hal ini bertentangan dengan ruas kanan ketidaksamaan (i), yang mengharuskan $v \geq E(x^{**}, y^*)$. Konsekuensinya, hal terbaik yang dapat dilakukan oleh pemain 1 adalah mencegah pembayaran yang diharapkan agar tidak di bawah nilai v , Demikian pula hal terbaik yang dapat dilakukan

oleh pemain 2 adalah memastikan bahwa pembayaran yang diharapkan oleh pemain 1 jangan sampai melebihi nilai v dan hal ini dapat dicapai dengan menggunakan strategi y^* .

Theorema diatas memberikan jaminan bahwa setiap *two zero-sum matrix game* G mempunyai solusi dan strategi-strategi untuk mencapai solusi tersebut tidak musti unik. Sehingga jika tidak ditemukan solusi pada strategi murni maka pasti terdapat solusi pada strategi campuran.

b. Strategi Campuran

Strategi Campuran digunakan ketika strategi murni tidak menghasilkan titik sadel. Dalam strategi campuran nilai pembayaran dianggap sebagai nilai harapan pembayaran (*expected payoff*). *Expected payoff* didefinisikan oleh fungsi $E : S^m \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberikan oleh $E(x, y) = x^T Ay$.

Misal $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ dan $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ adalah masing-masing himpunan strategi pemain 1 dan pemain 2 kemudian $A = (a_{ij})_{m \times n}$ sebagai matriks permainan. Lalu misalkan pemain 1 dan pemain 2 memainkan matriks permainan A . Jika pemain 1 memilih strategi $x_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ dan pemain 2 memilih strategi $y_j \geq 0$ dan $\sum_{j=1}^n y_j = 1$ maka *expected payoff* (nilai pembayaran yang diharapkan) oleh pemain 1 adalah $E(x, y) = x^T Ay = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j$,

Dalam hal ini $x^T Ay$ dapat dianggap sebagai perolehan rata-rata *expected payoff* pemain 1 yang bergantung pada pilihan pemain 2 jika pemain 2 menggunakan strategi murni yang dijabarkan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^m a_{i1} x_i \text{ sesuai dengan } y_1$$

$$\sum_{i=1}^m a_{i2} x_i \text{ sesuai dengan } y_2$$

$$\sum_{i=1}^m a_{in} x_i \text{ sesuai dengan } y_n$$

Atau dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} v_A(x) &= \min \{ x^T A_j \mid j = 1, 2, \dots, n \} \\ &= \min \left\{ \sum_{i=1}^m x_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m x_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m x_i a_{in} \right\} \\ &= \min \left\{ \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \mid j = 1, 2, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

Karena pemain 1 harus memilih strategi campuran $x^* \in X$ berdasarkan memaksimumkan pilihan dari pemain 2 $v_A(x)$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} v_A(x^*) &= \max \{ v_A(x) \mid x \in X \} \\ &= \max \left\{ \min \left\{ \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \mid j = 1, 2, \dots, n \right\} \right\} \end{aligned}$$

Dalam hal ini $x^* \in X$ disebut strategi optimal pemain 1 dan $v_A(x^*)$ *gain floor* dari matriks permainan A . Dengan cara yang sama apabila pemain 2 memilih strategi $y \in Y$ maka diperoleh nilai *loss-ceilling* sebagai berikut :

$$v_B(y^*) = \min \left\{ \max \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \mid i = 1, 2, \dots, m \right\} \right\}$$

Dimana $y^* \in Y$ adalah strategi optimal untuk pemain 2 dan $v_B(y^*)$ *loss-ceilling* dari matriks permainan A .

Menghitung nilai $v_A(x^*)$ yang berkorespondensi dengan strategi $x^* \in X$ dan menghitung nilai $v_B(y^*)$ yang berkorespondensi dengan $y^* \in Y$ equivalen dengan menyelesaikan masalah program linear berikut:

$$\begin{aligned} & \max \{v_A\} \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v_A \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad v_A \text{ tidak terbatas tanda} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \min \{v_B\} \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v_B \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n), \quad v_B \text{ tidak terbatas tanda} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dapat dilihat bahwa persamaan (2.1) dan (2.2) adalah pasanan primal dual dari permasalahan program linear. Jadi nilai maksimum dari v_A akan sama dengan nilai dari minimum v_B . nilai umum dari keduanya disebut sebagai nilai dari matriks game A yaitu $v_A = v_B = v^*$

c. Strategi dominansi

Selain dua jenis strategi yaitu strategi murni dan campuran dikenalkan pula srategi dominansi. Strategi dominansi digunakan untuk mengurangi ukuran matriks permainan. Misalkan matriks permainan dengan pembayaran berupa bilangan tegas adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -4 \\ 8 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Dapat diperhatikan bahwa nilai-nilai pada baris tiga adalah selalu lebih besar atau sama dengan nilai-nilai pada baris satu. Secara intuitif pemain I tidak akan memilih strategi pada baris satu atau x_1 dikarenakan Pemain I memiliki tujuan atau prinsip untuk mendapatkan keuntungan atau nilai permainan sebesar-besarnya. Dengan demikian dapat dipastikan pemain I akan lebih memilih untuk menggunakan strategi tiga atau x_3 . Demikian pula dengan pemain II tidak akan memilih strategi satu atau y_1 , dikarenakan pemain II memiliki tujuan atau prinsip untuk meminimalkan kerugian atau nilai yang dibayarkan. Atau dengan kata lain baris satu dikatakan didominasi oleh baris tiga, dan kolom satu dikatakan didominasi juga oleh kolom tiga, sehingga dapat di hapus dari matriks pembayaran.

Definisi 2.16 [12] *di misalkan sebuah matriks permainan A dengan nilai permainan berupa bilangan tegas $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Maka baris h didominasi oleh baris i jika $a_{hj} \leq a_{ij}$ untuk semua j , di mana $1 \leq j \leq n$, hal ini menjadikan mungkin dilakukan eliminasi pada baris h . Kolom k didominasi oleh kolom j jika $a_{ik} \geq a_{ij}$ untuk semua i , di mana $1 \leq i \leq m$, hal ini memungkinkan dilakukannya eliminasi kolom k*

Contoh 2.16 dimisalkan matriks permainan dengan pembayaran berupa bilangan tegas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -4 \\ 8 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Baris 1 didominasi oleh kolom 3. Sehingga pencarian solusi menggunakan matriks permainan yang telah direduksi

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{3} \\ 6 & 3 & -1 & -4 \\ 8 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Pada matriks permainan 2×4 , kolom 1 didominasi oleh baris 3 sehingga matriks permainan menjadi :

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{3} \\ \boxed{6} & 3 & -1 & -4 \\ \boxed{8} & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dan kolom 1 dapat dieliminasi, sehingga nilai permainan dari matriks diatas dapat dicari dengan matriks permainan berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$