

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, dibahas mengenai teori-teori sebagai penunjang materi pokok pada bab selanjutnya. Teori yang dibahas antara lain program linier, asumsi dalam program linier, formulasi model program linier, bentuk umum program linier, metode transportasi, algoritma masalah transportasi, keseimbangan model masalah transportasi, formulasi metode transportasi, serta solusi pada masalah transportasi.

2.1 Program Linier

Linear programming merupakan metode matematik yang sering digunakan dalam pengambilan keputusan. Penggunaan program linier memiliki tujuan untuk menyusun model yang dapat digunakan sebagai alternatif pengambilan keputusan dalam menentukan pengalokasian yang optimal dari sumber ke tempat tujuan sehingga biaya alokasi minimum atau laba yang diperoleh maksimum. Jadi, *linear programming* atau program linier merupakan metode matematik yang memiliki karakteristik linier untuk menentukan solusi optimal dengan cara memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan dengan memperhatikan fungsi batasan atau Kendala [1].

Program linier memiliki ciri-ciri sebagai berikut [8]:

1. Tujuan penyelesaian masalah adalah maksimisasi atau minimisasi.
2. Terdapat kendala yang membatasi pencapaian tujuan.
3. Ada beberapa alternatif penyelesaian persoalan.
4. Hubungan matematis bersifat linier.

2.1.1 Asumsi dalam Program Linier

Formulasi suatu permasalahan kedalam bentuk model program linier dikatakan valid jika memenuhi asumsi-asumsi pada program linier. Asumsi-asumsi dasar pada program linier antara lain [8]:

1. *Proportionality* (kesebandingan)

Asumsi ini berarti bahwa naik turunnya nilai fungsi tujuan dan fungsi batasan atau kendala sebanding (*propotional*) dengan perubahan tingkat kegiatan.

2. *Additivity* (penambahan)

Asumsi ini berarti bahwa aktivitas total sama dengan penjumlahan aktivitas individu.

3. *Divisibility* (dapat dibagi)

Maksud dari asumsi *divisibility* adalah bahwa solusi tidak harus bilangan bulat (*integer*), bisa juga bilangan pecahan.

4. *Certainty* (kepastian)

Asumsi *certainty* menyatakan bahwa semua parameter yang terdapat dalam model LP sudah diketahui dengan pasti.

5. *Non-negative variable*

Asumsi ini berarti bahwa semua variabel pada LP bernilai tak negatif.

2.1.2 Formulasi Model Program Linier

Formulasi model program linier merupakan langkah yang paling menentukan dalam program linier. Langkah ini mencakup identifikasi tujuan dan batasan yang membatasi tujuan tersebut. Suatu permasalahan dapat diformulasikan kedalam model program linier dengan memperhatikan beberapa unsur yang sering digunakan dalam penyusunan program linier, antara lain [9]:

1. Variabel keputusan

Variabel keputusan merupakan variabel yang dapat menentukan keputusan-keputusan yang akan dibuat dalam pencapaian solusi optimal. Setiap variabel keputusan baik didalam fungsi tujuan maupun fungsi kendala berpangkat satu.

2. Fungsi tujuan (*objective function*)

Fungsi tujuan adalah fungsi dari variabel keputusan yang menggambarkan tujuan atau sasaran dalam permasalahan program linier untuk memperoleh keuntungan maksimum atau untuk penggunaan biaya minimum.

3. Fungsi pembatas/kendala (*constraint function*)

Fungsi kendala merupakan bentuk rumusan kendala sebagai pembatas terhadap variabel-variabel keputusan yang dibuat dalam mencapai tujuan.

4. Batasan variabel

Batasan variabel menggambarkan tentang wilayah variabel, dimana variabel keputusan diasumsikan non-negatif.

2.1.3 Bentuk Umum Program Linier

Secara umum, bentuk program linier dapat dituliskan sebagai berikut [10]:

1. Fungsi tujuan (*objective function*):

Memaksimumkan/ meminimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

2. Fungsi pembatas (*constraint function*):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \end{aligned}$$

Dengan syarat variabel

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \quad c_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n$ adalah konstanta.

Bentuk standar program linier dapat disajikan kedalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel bentuk standar LP

Kegiatan Sumber	Pemakaian sumber daya per unit kegiatan (<i>output</i>)					Kapasitas
	1	2	3	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}	b_3
...						
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	b_m
ΔZ penambahan tiap unit	c_1	c_2	c_3	...	c_n	
Tingkat Kegiatan	x_1	x_2	x_3	...	x_n	

2.2 Metode Transportasi

Metode transportasi adalah salah satu kelas khusus dari program linier yang berhubungan dengan pengalokasian suatu komoditas dari sumber ke tujuan. Tujuannya adalah untuk menentukan strategi pengalokasian yang dapat meminimalkan total biaya pengiriman dengan memperhatikan kapasitas persediaan dan permintaan. Metode transportasi dapat diaplikasikan dalam menyelesaikan masalah seperti pengendalian persediaan, penjadwalan pekerjaan, dan penugasan karyawan atau mesin [11].

Secara umum, metode transportasi memiliki katakteristik sebagai berikut [1]:

1. Adanya pemindahan suatu barang dari sejumlah sumber ke tempat tujuan dengan biaya semimum mungkin.
2. Permintaan pada setiap sumber harus dipenuhi tanpa melebihi kapasitas produksi pada setiap sumber.

Dalam penggunaan metode transportasi, terdapat beberapa persyaratan yang harus dipenuhi, antara lain [1]:

1. Tempat sumber, dapat berupa pabrik, karyawan, kapasitas produksi, dan lain sebagainya.
2. Tempat tujuan, dapat berupa gudang, pasar, pekerjaan, dan lain sebagainya.
3. Kapasitas tempat sumber dan jumlah permintaan tempat tujuan.
4. Biaya dari tempat sumber ke tempat tujuan.
5. Adanya keseimbangan kapasitas tempat sumber dengan jumlah permintaan tempat tujuan.

2.2.1 Langkah-Langkah Pemecahan Masalah Transportasi

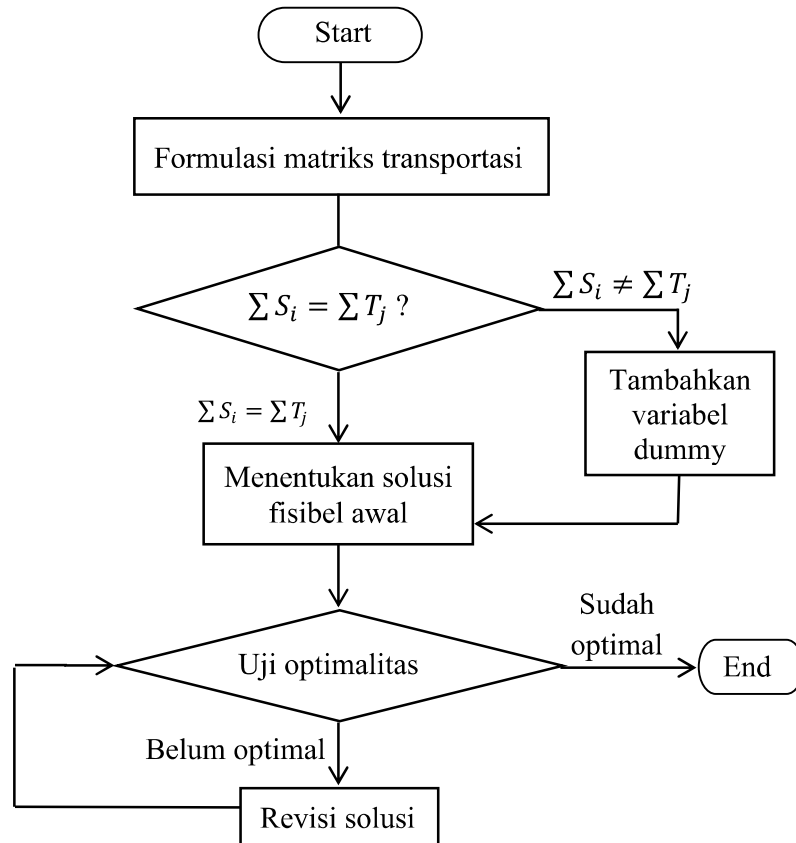
Langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah transportasi antara lain [10]:

1. Menformulasikan masalah transportasi kedalam bentuk matriks transportasi.
2. Mengidentifikasi model transportasi seimbang atau tidak seimbang. Jika model transportasi tidak seimbang, tambahkan variabel *dummy* untuk menyeimbangkan model transportasi.
3. Menentukan solusi fisibel awal.

4. Mengecek solusi yang dihasilkan optimal atau belum. Jika solusi yang dihasilkan telah optimal, maka proses pemecahan masalah transportasi selesai.

Jika solusi yang dihasilkan belum optimal, maka dilakukan revisi solusi.

Langkah-langkah diatas dapat diilustrasikan dalam bentuk *flowchart* sebagai berikut:



Gambar 2.1 *Flowchart* algoritma masalah transportasi

2.2.2 Keseimbangan Model pada Masalah Transportasi

Masalah transportasi dikatakan seimbang (*balanced*) jika jumlah persediaan pada sumber sama dengan jumlah permintaan dari tujuan atau memenuhi persamaan [11]:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.1)$$

Dalam kasus nyata, jumlah total persediaan pada sumber belum tentu sama dengan jumlah total permintaan dari tempat tujuan. Hal tersebut dikatakan sebagai masalah transportasi tidak seimbang (*unbalanced*) [11]:

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.2)$$

Terdapat dua kemungkinan yang dapat terjadi pada kasus masalah transportasi tidak seimbang, yaitu:

1. $\sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{j=1}^n b_j$

Kemungkinan pertama terjadi ketika tingkat permintaan yang ada melampaui kemampuan sumber-sumber untuk mengirim barang. Hal itu mengakibatkan terdapat permintaan dari satu atau lebih tujuan yang dipenuhi sebagian atau tidak dapat dipenuhi sama sekali oleh sumber.

2. $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$

Kemungkinan kedua terjadi ketika kemampuan sumber-sumber untuk mengirim barang melampaui tingkat permintaan yang ada. Hal itu mengakibatkan terdapat satu atau lebih sumber yang mungkin hanya mengirim sebagian barang atau tidak mengirim sama sekali barang ke tempat tujuan.

Untuk menentukan solusi fisibel, masalah transportasi harus dipastikan sebagai masalah transportasi seimbang. Masalah transportasi tidak seimbang dapat diseimbangkan dengan cara menambahkan variabel *dummy*. Jika total permintaan melebihi total persediaan, maka ditambahkan baris (sumber) *dummy* dengan kapasitas permintaan sebanyak

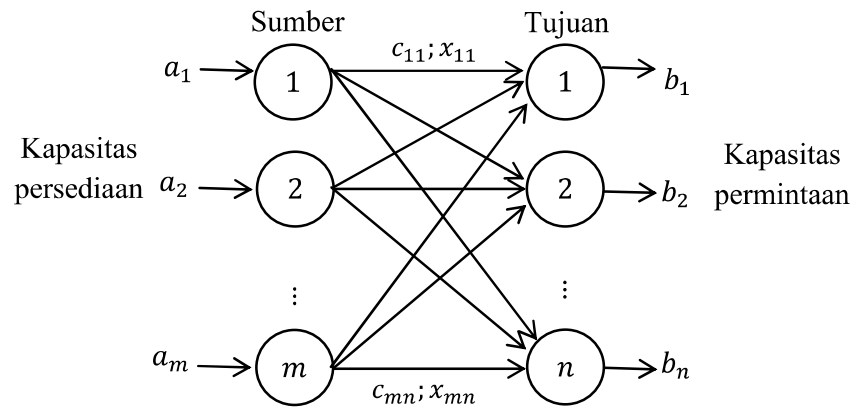
$$\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

Sebaliknya, jika total persediaan melebihi total permintaan, maka ditambahkan kolom (tujuan) *dummy* dengan kapasitas persediaan sebanyak

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

Biaya transportasi per unit barang pada variabel *dummy* adalah nol. Hal itu karena tidak mungkin terjadi pengiriman barang dari sumber *dummy* ke seluruh tujuan, begitu juga dari seluruh sumber ke tujuan *dummy*.

2.2.3 Formulasi Metode Transportasi



Gambar 2.2 Jaringan masalah transportasi

Masalah umum metode transportasi diwakili oleh jaringan pada gambar 2.2. Terdapat m sumber dan n tujuan yang masing-masing diwakili oleh simpul (*node*), serta terdapat busur yang mewakili rute sebagai penghubung antara sumber dan tujuan. Busur (i, j) menghubungkan sumber i ke tujuan j membawa dua informasi, yaitu biaya transportasi (c_{ij}) dan jumlah barang yang dikirim (x_{ij}). Jumlah penawaran sumber i adalah a_i dan jumlah permintaan di tujuan j adalah b_j . Tujuan dari model ini adalah untuk menentukan x_{ij} yang belum diketahui sehingga akan meminimalkan total biaya transportasi dengan memperhatikan batasan persediaan dan permintaan [11].

Secara umum, model masalah transportasi dapat disajikan dalam bentuk suatu tabel yang menunjukkan sisi persediaan (sumber), sisi permintaan (tujuan),

kapasitas persediaan, kapasitas permintaan, serta biaya transportasi dari masing-masing sumber ke masing-masing tujuan, sebagaimana dalam tabel berikut:

Tabel 2.2 Tabel awal masalah transportasi

Tujuan (j) Sumber(i)	T_1	T_2	...	T_n	Persediaan (a_i)
S_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
S_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
S_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Permintaan (b_j)	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Dalam bentuk matematika, permasalahan transportasi tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut [1]:

Fungsi tujuan:

Meminimumkan

$$(P): Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.3)$$

dengan fungsi batasan

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

Keterangan:

Z = total biaya transportasi

x_{ij} = jumlah barang yang harus dikirim dari i ke j

c_{ij} = biaya pengiriman per unit barang dari i ke j

a_i = kuantitas persediaan barang dari sumber i

b_j = kuantitas permintaan barang di tempat tujuan j

S_i = sumber, $i = 1, 2, \dots, m$

T_j = tujuan, $j = 1, 2, \dots, n$

2.3 Solusi Masalah Transportasi

Terdapat dua tahap solusi dalam menyelesaikan masalah transportasi. Tahapan solusi tersebut antara lain sebagai berikut [1]:

1. Solusi fisibel awal

Penentuan solusi fisibel awal digunakan untuk menentukan penyelesaian awal dalam masalah transportasi. Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi fisibel awal, antara lain *North West Corner Method* (NWC), *Least Cost Method* (LC), dan *Vogel's Approximation Method* (VAM). Ketiga metode tersebut memberikan hasil yang mendekati optimum dengan solusi fisibel yang berbeda satu sama lain. Berikut diberikan beberapa definisi dan teorema terkait solusi fisibel:

Definisi 2.1 [12] Himpunan alokasi $\{x_{ij} \geq 0 | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ yang memenuhi kendala pada masalah transportasi disebut solusi fisibel.

Contoh 2.1 Diberikan masalah transportasi dari [13] sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

Dengan kendala: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70$$

$$x_{11} + x_{21} = 60$$

$$x_{12} + x_{22} = 70$$

$$x_{13} + x_{23} = 20$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

Model masalah transportasi diatas disajikan pada tabel berikut:

Tabel 2.3 Tabel awal masalah transportasi Contoh 2.1

Tujuan Sumber	T_1	T_2	T_3	$Supply$
S_1	250 x_{11}	275 x_{12}	400 x_{13}	80
S_2	300 x_{21}	250 x_{22}	350 x_{23}	70
$Demmand$	60	70	20	150

Dengan menggunakan *Vogel's Approximation Method*, diperoleh solusi fisibel awal yang disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 2.4 Tabel hasil analisis Vogel's Approximation Method

Contoh 2.1

Tujuan Sumber	T_1	T_2	T_3	$Supply$
S_1	250 60	275 20	400	80
S_2	300	250 50	350 20	70
$Demmand$	60	70	20	150

Diperoleh himpunan alokasi $x_{ij} = \{x_{11} = 60, x_{12} = 20, x_{22} = 50, x_{23} = 20, \}$ yang memenuhi kendala

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = a_i$$

$$60 + 20 = 80$$

$$50 + 20 = 70$$

dan

$$\sum_{i=1}^2 x_{ij} = b_j$$

$$60 = 60$$

$$20 + 50 = 70$$

$$20 = 20$$

Karena himpunan alokasi $x_{ij} = \{x_{11} = 60, x_{12} = 20, x_{22} = 50, x_{23} = 20, \}$ memenuhi kendala masalah transportasi diatas, maka himpunan alokasi tersebut disebut sebagai solusi fisibel.

Definisi 2.2 [12] Solusi fisibel dikatakan solusi optimal jika meminimumkan total biaya transportasi.

Contoh 2.2 Diberikan masalah transportasi dari [13] seperti pada Contoh 2.1. berdasarkan Contoh 2.1, diperoleh himpunan alokasi $x_{ij} = \{x_{11} = 60, x_{12} = 20, x_{22} = 50, x_{23} = 20, \}$ dengan biaya transportasi

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij} \\ &= (250 \times 60) + (275 \times 20) + (250 \times 50) + (350 \times 20) \\ &= 40.000 \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan pengoptimalan dengan menggunakan metode Multiplier [13], diperoleh bahwa solusi fisibel masalah transportasi tersebut sudah optimal dan dapat meminimumkan total biaya transportasi. Sehingga solusi fisibel masalah transportasi tersebut dikatakan sebagai solusi optimal karena dapat meminimumkan total biaya transportasi.

Terjaminnya suatu masalah transportasi memiliki solusi fisibel adalah transportasinya harus seimbang.

Teorema 2.1 [12] (eksistensi) masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal jika dan hanya jika merupakan masalah transportasi seimbang, yaitu $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan bahwa jika masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal, maka merupakan masalah transportasi seimbang.

Diketahui masalah transportasi memiliki solusi fisibel. Misalkan $\{x_{ij} \geq 0 \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan solusi fisibel, maka memenuhi batasan:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

Sehingga diperoleh,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i \text{ dan } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^n b_j$$

Jadi,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Hal ini membuktikan bahwa jika masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal, maka merupakan masalah transportasi seimbang.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan bahwa jika masalah transportasi seimbang, maka memiliki solusi fisibel awal.

Diketahui masalah transportasi seimbang, yaitu $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Misalkan $x_{ij} = \mu_i b_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ dimana μ_i merupakan bilangan riil. Karena $x_{ij} = \mu_i b_j$, maka

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n \mu_i b_j \\ &= \mu_i \sum_{j=1}^n b_j \end{aligned}$$

atau

$$\mu_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j}$$

lebih lanjut

$$x_{ij} = \mu_i b_j = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j} b_j$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j} b_j \right) = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

dan

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j} b_j \right) = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Hal ini berarti bahwa $\{x_{ij} \geq 0 | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan solusi fisibel. Jadi masalah transportasi seimbang memiliki solusi fisibel.

Berdasarkan pembuktian diatas, terbukti bahwa masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal jika dan hanya jika merupakan masalah transportasi seimbang, yaitu $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. ■

Contoh 2.3 Diberikan masalah transportasi seperti pada Contoh 2.1.

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan bahwa jika masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal, maka merupakan masalah transportasi seimbang.

Dari Contoh 2.1 diperoleh himpunan alokasi $x_{ij} = \{x_{11} = 60, x_{12} = 20, x_{22} = 50, x_{23} = 20, \}$ sebagai solusi fisibel dari masalah transportasi tersebut yang memenuhi kendala:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70$$

$$x_{11} + x_{21} = 60$$

$$x_{12} + x_{22} = 70$$

$$x_{13} + x_{23} = 20$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

Sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_{ij} = \sum_{i=1}^2 a_i$$

$$60 + 20 + 50 + 20 = 80 + 70$$

$$150 = 150$$

dan

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 x_{ij} = \sum_{j=1}^3 b_j$$

$$60 + 20 + 50 + 20 = 60 + 70 + 20$$

$$150 = 150$$

Jadi

$$\sum_{i=1}^2 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j = 150$$

Hal ini membuktikan bahwa jika masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal, maka merupakan masalah transportasi seimbang.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan bahwa jika masalah transportasi seimbang, maka memiliki solusi fisibel awal.

Diketahui masalah transportasi diatas seimbang karena $\sum_{i=1}^2 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j = 150$, misalkan $x_{ij} = \mu_i b_j \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ dimana μ_i merupakan bilangan riil. Karena $x_{ij} = \mu_i b_j$, maka

$$a_i = \sum_{j=1}^3 x_{ij} = \sum_{j=1}^3 \mu_i b_j = \mu_i \sum_{j=1}^3 b_j$$

atau

$$\mu_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^3 b_j}$$

Lebih lanjut,

$$x_{ij} = \mu_i b_j = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^3 b_j} b_j$$

Karena itu diperoleh

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = \sum_{j=1}^j \left(\frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j} b_j \right) = a_i, i = 1, 2$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{1j} = 60 + 20 + 0 = a_1 = 80$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{2j} = 0 + 50 + 20 = a_2 = 70$$

dan

$$\sum_{i=1}^2 x_{ij} = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{a_i}{\sum_{j=1}^n b_j} b_j \right) = b_j, j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^2 x_{i1} = 60 + 0 = b_1 = 60$$

$$\sum_{i=1}^2 x_{i2} = 20 + 50 = b_2 = 70$$

$$\sum_{i=1}^2 x_{i3} = 0 + 20 = b_3 = 20$$

Hal ini berarti bahwa himpunan alokasi $x_{ij} = \{x_{11} = 60, x_{12} = 20, x_{22} = 50, x_{23} = 20, \}$ merupakan solusi fisibel. Sehingga terbukti bahwa jika masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal, maka merupakan masalah transportasi seimbang.

Berdasarkan pembuktian diatas, terbukti bahwa masalah transportasi memiliki solusi fisibel awal jika dan hanya jika merupakan masalah transportasi seimbang, yaitu $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. ■

2. Solusi optimal

Solusi optimal di tentukan setelah ditentukannya solusi fisibel awal. Solusi optimal merupakan solusi yang dapat meminimalkan atau memaksimalkan fungsi tujuan. Sebelum dilakukan uji optimal untuk memperoleh solusi optimal, harus dipastikan tidak terdapat degenerasi dan redundansi. Degenerasi

dan redundansi terjadi jika tidak terpenuhinya syarat pengujian bahwa sel yang terisi harus memenuhi syarat $m + n - 1$, dimana m adalah baris dan n adalah kolom. Degenerasi terjadi jika banyaknya sel pengalokasian lebih kecil dari syarat $m + n - 1$. Untuk mengatasi kasus tersebut, diperlukan alokasi distribusi semu pada sel yang belum terisi dengan nilai yang sangat kecil yang dinotasikan dengan ε , dimana $\varepsilon > 0$. Sedangkan kasus redundansi terjadi apabila banyaknya sel pengalokasian lebih besar dari syarat $m + n - 1$. Oleh karena itu, diperlukan pemindahan atau penggabungan alokasi distribusi ke sel yang lain sedemikian sehingga syarat terpenuhi [3]. Ada dua metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi optimal, yaitu *Stepping Stone Method* dan *Modification Distribution method* (MODI).

Berikut diberikan teorema untuk menjamin bahwa setiap masalah transportasi memiliki solusi optimal,

Misalkan diberikan masalah transportasi dengan biaya tereduksi, yaitu:

$$(P_1) \min z^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} \quad (2.8)$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

dimana u_i, v_j bilangan riil.

Untuk menjamin setiap masalah transportasi memiliki solusi optimal, diberikan teorema berikut:

Teorema 2.2 [12] Untuk sebarang solusi optimal masalah transportasi (P_1) merupakan solusi optimal dari masalah transportasi (P) .

Bukti : Akan dibuktikan bahwa untuk sebarang solusi optimal masalah transportasi (P_1) merupakan solusi optimal dari masalah transportasi (P) .

Diambil sebarang $x^* = \{x_{ij}^* \geq 0 \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ solusi optimal dari (P_1) , maka x^* solusi fisibel yang memenuhi kendala pada (P_1) dan

$$\begin{aligned} z^* &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij}^* \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* - \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n x_{ij}^* - \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m x_{ij}^* \\ &= z - \sum_{i=1}^m u_i a_i - \sum_{j=1}^n v_j b_j \end{aligned}$$

Karena $\sum_{i=1}^m u_i a_i$ dan $\sum_{j=1}^n v_j b_j$ tidak bergantung pada x^* , maka x^* juga solusi optimal untuk masalah transportasi (P) .

Berdasarkan pembuktian diatas, terbukti bahwa untuk sebarang solusi optimal masalah transportasi (P_1) merupakan solusi optimal dari masalah transportasi (P) . ■

Contoh 2.4 Diberikan masalah transportasi pada Contoh 2.1 untuk meminimumkan

$$(P_1) \quad z^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij}$$

$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ dimana u_i, v_j bilangan riil. Berdasarkan Contoh 2.2 diperoleh $x^* = \{x_{11}^* = 60, x_{12}^* = 20, x_{22}^* = 50, x_{23}^* = 20\}$ sebagai himpunan solusi optimal, maka x^* memenuhi kendala dan

$$\begin{aligned} z^* &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij}^* \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}^* - \sum_{i=1}^2 u_i \sum_{j=1}^3 x_{ij}^* - \sum_{j=1}^3 v_j \sum_{i=1}^2 x_{ij}^* \\ &= z - \sum_{i=1}^2 u_i a_i - \sum_{j=1}^3 v_j b_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (250 \times 60) + (275 \times 20) + (250 \times 50) + (350 \times 20) - \sum_{i=1}^2 u_i a_i - \\
&\quad \sum_{j=1}^3 v_j b_j \\
&= 40.000 - \sum_{i=1}^2 u_i a_i - \sum_{j=1}^3 v_j b_j
\end{aligned}$$

Karena $\sum_{i=1}^m u_i a_i$ dan $\sum_{j=1}^n v_j b_j$ tidak bergantung pada x^* , maka x^* juga solusi optimal untuk masalah transportasi meminimumkan

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Teorema 2.2 diatas digunakan untuk menunjukkan teorema 2.3 berikut ini.

Teorema 2.3 [12] jika $\{x_{ij}^0 \geq 0 \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ solusi fisibel dari masalah transportasi (P) dan $(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0$, untuk semua i dan j , dimana u_i dan v_j adalah bilangan riil sedemikian sehingga minimum dari masalah transportasi (P_1) bernilai 0, maka $\{x_{ij}^0 \geq 0 \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ adalah solusi optimal dari masalah transportasi (P) .

Bukti: akan dibuktikan bahwa jika $\{x_{ij}^0 \geq 0 \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ solusi fisibel dari masalah transportasi (P) dan $(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0$, untuk semua i dan j , dimana u_i dan v_j adalah bilangan riil sedemikian sehingga minimum dari masalah transportasi (P_1) bernilai 0, maka $\{x_{ij}^0 \geq 0 \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ adalah solusi optimal dari masalah transportasi (P) .

Diambil sebarang $\{x_{ij}^0 \geq 0 \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ solusi fisibel dari (P) , maka

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Karena $(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0, \forall i, j$ dan $\min z^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j)x_{ij} = 0$, maka

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j)x_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

dan memenuhi

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

Karena

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}^0 = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

dan memenuhi

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

maka ini berarti $\{x_{ij}^0 | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ solusi optimal dari (P_1) .

Berdasarkan teorema 2.4 maka $\{x_{ij}^0 | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan solusi optimal dari (P) .

Berdasarkan pembuktian diatas, maka terbukti bahwa jika $\{x_{ij}^0 \geq 0 | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ solusi fisibel dari masalah transportasi

(P) dan $(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0$, untuk semua i dan j , dimana u_i dan v_j adalah bilangan riil sedemikian sehingga minimum dari masalah transportasi (P_1) bernilai 0, maka $\{x_{ij}^0 \geq 0 | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ adalah solusi optimal dari masalah transportasi (P).■

Contoh 2.5 Diberikan masalah transportasi pada Contoh 2.1 untuk meminimumkan

$$(P) z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

Berdasarkan Contoh 2.2 diperoleh himpunan alokasi $x_{ij}^0 = \{x_{11}^0 = 60, x_{12}^0 = 20, x_{22}^0 = 50, x_{23}^0 = 20\}$ sebagai solusi fisibel dari masalah transportasi tersebut, maka

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij}^0 = a_i, i = 1, 2$$

$$60 + 20 + 0 = 80$$

$$0 + 50 + 20 = 70$$

dan

$$\sum_{i=1}^2 x_{ij}^0 = b_j, j = 1, 2, 3,$$

$$60 + 0 = 60$$

$$20 + 50 = 70$$

$$0 + 20 = 20$$

Karena $(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0, \forall i, j$ dan $\min z^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = 0$, maka

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

dan memenuhi

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

Karena

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^0 = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

$$z = (250 \times 60) + (275 \times 20) + (250 \times 50) + (350 \times 20) = \sum_{i=1}^2 u_i a_i +$$

$$\sum_{j=1}^3 v_j b_j$$

$$z = 40.000 = \sum_{i=1}^2 u_i a_i + \sum_{j=1}^3 v_j b_j$$

dan memenuhi

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij}^0 = a_i, i = 1, 2$$

$$60 + 20 + 0 = 80$$

$$0 + 50 + 20 = 70$$

dan

$$\sum_{i=1}^2 x_{ij}^0 = b_j, j = 1, 2, 3,$$

$$60 + 0 = 60$$

$$20 + 50 = 70$$

$$0 + 20 = 20$$

maka ini berarti $x_{ij}^0 = \{x_{11}^0 = 60, x_{12}^0 = 20, x_{22}^0 = 50, x_{23}^0 = 20\}$ solusi optimal dari (P_1) . Berdasarkan teorema 2.4 maka $x_{ij}^0 = \{x_{11}^0 = 60, x_{12}^0 = 20, x_{22}^0 = 50, x_{23}^0 = 20\}$ merupakan solusi optimal dari (P) .