

**SKRIPSI**

**MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN PENYAKIT  
TUBERKULOSIS DENGAN MEMPERHATIKAN PENGARUH  
VAKSINASI**

*A MATHEMATICS MODEL ON THE SPREAD OF TUBERCULOSIS  
DISEASE WITH ATTENTION TO THE EFFECT OF VACCINATION*



**ZAAHIROTUS SALSABILA**

24010119140087

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA  
UNIVERSITAS DIPONEGORO  
SEMARANG  
2023**

**SKRIPSI**

**MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN PENYAKIT  
TUBERKULOSIS DENGAN MEMPERHATIKAN PENGARUH  
VAKSINASI**

*A MATHEMATICS MODEL ON THE SPREAD OF TUBERCULOSIS  
DISEASE WITH ATTENTION TO THE EFFECT OF VACCINATION*

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat Sarjana  
Matematika (S.Mat.)



ZAAHIROTUS SALSABILA

24010119140087

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN MATEMATIKA  
UNIVERSITAS DIPONEGORO  
SEMARANG  
2023**

**SKRIPSI**

**MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN PENYAKIT  
TUBERKULOSIS DENGAN MEMPERHATIKAN PENGARUH  
VAKSINASI**

Telah dipersiapkan dan disusun oleh:

ZAAHIROTUS SALSABILA  
24010119140087

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji  
Pada tanggal 19 Mei 2023

Susunan Tim Penguji

Pembimbing II/Penguji,



Prof. Dr. Dra. Sunarsih, M.Si  
NIP. 195809011986032002

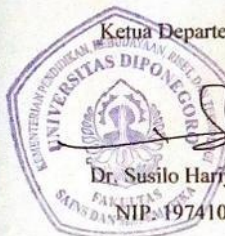
Penguji,



Dr. Redemtus Heru Tjahjana, S.Si., M.Si.  
NIP. 197407172000121001

Mengetahui

Ketua Departemen Matematika,



  
Dr. Susilo Harjanto, S.Si., M.Si.  
NIP. 197410142000121001

Pembimbing I/Penguji,



Dr. Drs. Kartono, M.Si  
NIP. 196308251990031003

## **PERNYATAAN**

Dengan ini saya menyatakan bahwa pada Skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang sepengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, 19 Mei 2023



Zaahirotus Salsabila

## **HALAMAN PERSEMBAHAN**

### **Kupersembahkan karya ini untuk :**

Untuk salsa yang sudah berjalan selama ini

Untuk ibu, papa, adek dan segenap keluarga yang mendoakan di setiap langkah yang ditempuh.

Untuk Iffata, Nurul, Yoan, dan jalankuyy yang memberi berbagai warna di perkuliahan ini

Dan untuk setiap pihak yang telah atau pernah hadir untuk menemani secara langsung maupun tidak langsung.

*Terimakasih*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir berjudul “Model Matematika pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Memperhatikan Pengaruh Vaksinasi”. Tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika Strata 1 (S1) pada Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro.

Tugas akhir ini, membahas modifikasi model penyebaran penyakit SLITR diubah menjadi model matematika SLIR yang akan digunakan untuk menganalisa pengaruh vaksinasi pada penyebaran penyakit tuberkulosis. Beberapa tahapan yang dilakukan ialah seperti melakukan formulasi pada model, menentukan titik ekuilibrium, penentuan bilangan reproduksi dasar, menganalisa stabilitas titik ekuilibrium, dan melakukan simulasi numerik dengan data pasien tuberkulosis. Tugas akhir ini memberikan penjelasan mengenai pelaksanaan vaksinasi sangat berpengaruh dalam penyebaran penyakit tuberkulosis.

Tugas akhir ini mendapatkan bahwa model SLIR bersifat stabil asimtotik lokal pada titik ekuilibrium bebas penyakit, hal ini terbukti dengan hasil nilai bilangan reproduksi dasar sebesar  $R_0 = 0,07584400458 < 1$ , dan pada model SLIR ini parameter vaksinasi berpengaruh secara signifikan dalam menurunkan penyebaran penyakit tuberkulosis. Semakin tinggi tingkat vaksinasi dapat menurunkan jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis baik terinfeksi *latent* maupun terinfeksi aktif tuberkulosis.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada;

1. Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro,

2. Dr. Drs. Kartono, M.Si. selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan arahan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini,
3. Prof. Dr. Dra. Sunarsih, M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini,
4. Dr. Redemtus Heru Tjahjana, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah meluangkan waktu untuk memberi pengarahan untuk menyempurnakan Tugas Akhir ini,
5. Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika yang telah memberi ilmu selama perkuliahan
6. Semua pihak yang telah terlibat secara langsung dan tidak langsung.

Penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga diharapkan adanya kritik dan saran yang membangun. Kiranya tugas akhir ini dapat menjadi manfaat bagi banyak pihak.

Semarang, 19 Mei 2023

Zaahirotus Salsabila

## DAFTAR ISI

|   |      |
|---|------|
| SKRIPSI.....                            | i    |
| HALAMAN PENGESAHAN.....                 | ii   |
| PERNYATAAN.....                         | ii   |
| HALAMAN PERSEMBAHAN.....                | iv   |
| KATA PENGANTAR .....                    | v    |
| DAFTAR ISI.....                         | vii  |
| DAFTAR TABEL.....                       | x    |
| DAFTAR GAMBAR .....                     | xi   |
| DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN ..... | xii  |
| DAFTAR LAMPIRAN.....                    | xiii |
| ABSTRAK .....                           | xiv  |
| ABSTRACT .....                          | xv   |
| BAB I PENDAHULUAN.....                  | 1    |
| 1.1 Latar Belakang.....                 | 1    |
| 1.2 Rumusan Masalah .....               | 3    |
| 1.3 Batasan Masalah.....                | 3    |
| 1.4 Tujuan Penelitian.....              | 3    |
| 1.5 Manfaat Penelitian.....             | 4    |
| 1.6 Metodologi Penelitian .....         | 4    |
| 1.7 Sistematika Penulisan.....          | 5    |
| BAB II LANDASAN TEORI .....             | 7    |
| 2.1 Tuberkulosis .....                  | 7    |
| 2.2 Klasifikasi Tuberkulosis.....       | 8    |
| 2.3 Pengobatan Tuberkulosis.....        | 9    |
| 2.4 Matriks.....                        | 10   |
| 2.4.1 Determinan Matriks .....          | 10   |
| 2.4.2 Invers Matriks .....              | 12   |
| 2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....   | 13   |
| 2.6 Limit dan Kekontinuan Fungsi.....   | 16   |
| 2.6.1 Limit Fungsi.....                 | 16   |
| 2.6.2 Kekontinuan Fungsi.....           | 17   |



|   |           |
|---|-----------|
| 2.7 Turunan Fungsi.....   | 18        |
| 2.8 Persamaan Diferensial.....  | 19        |
| 2.9 Sistem Persamaan Diferensial.....                                 | 20        |
| 2.9.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear.....                        | 20        |
| 2.9.2 Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear.....                    | 21        |
| 2.10 Titik Ekuilibrium.....   | 21        |
| 2.11 Stabilitas Titik Ekuilibrium.....                                | 22        |
| 2.12 Next Generation Matrix (NGM).....                                | 22        |
| 2.13 Bilangan Reproduksi Dasar.....                                   | 23        |
| 2.14 Kriteria Routh-Hurwitz.....                                      | 24        |
| 2.15 Analisis Sensitivitas.....                                       | 27        |
| <b>BAB III PEMBAHASAN.....</b>  | <b>28</b> |
| 3.1 Model Matematika dari penyakit Tuberkulosis.....                  | 28        |
| 3.2 Variabel dan Parameter.....                                       | 29        |
| 3.3 Formulasi Model.....  | 30        |
| 3.3.1 Formulasi Model pada Variabel <i>Susceptible</i> (S).....       | 30        |
| 3.3.2 Formulasi Model pada Variabel <i>Latent</i> (L).....            | 31        |
| 3.3.3 Formulasi Model pada Variabel <i>Active Infectious</i> (I)..... | 33        |
| 3.3.4 Formulasi Model pada Variabel <i>Recovered</i> (R).....         | 34        |
| 3.4 Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar.....              | 37        |
| 3.4.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....                           | 37        |
| 3.4.2 Bilangan Reproduksi Dasar.....                                  | 39        |
| 3.4.3 Titik Ekuilibrium Endemik.....                                  | 41        |
| 3.5 Analisis Stabilitas Titik Ekuilibrium.....                        | 46        |
| 3.5.1 Analisis Stabilitas Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....       | 47        |
| 3.5.2 Analisis Stabilitas Titik Ekuilibrium Endemik.....              | 49        |
| 3.6 Simulasi Model dengan Studi Kasus Tuberkulosis.....               | 52        |
| 3.6.1 Nilai Parameter.....  | 52        |
| 3.6.2 Simulasi Model.....   | 54        |
| 3.6.3 Analisis Sensitivitas.....                                      | 55        |
| 3.6.4 Simulasi Numerik Pengaruh Parameter Vaksinasi.....              | 57        |
| 3.6.4.1 Simulasi Numerik tingkat vaksinasi $v = 0,988$ .....          | 57        |

|   |    |
|---|----|
| 3.6.4.2 Simulasi Numerik tingkat vaksinasi $v = 0,75$ ..... | 58 |
| 3.6.4.3 Simulasi Numerik tingkat vaksinasi $v = 0,3$ .....  | 59 |
| BAB IV PENUTUP .....  | 62 |
| 4.1 Kesimpulan.....   | 62 |
| 4.2 Saran.....  | 62 |
| DAFTAR PUSTAKA .....  | 64 |
| LAMPIRAN.....   | 67 |

## **DAFTAR TABEL**

|  |    |
|--|----|
| <b>Tabel 2. 1</b> Kriteria Routh-Hurwitz .....                               | 26 |
| <b>Tabel 3. 1</b> Variabel dan Parameter Model Penyebaran Tuberkulosis ..... | 29 |
| <b>Tabel 3. 2</b> Data Nilai Parameter .....                                 | 54 |
| <b>Tabel 3. 3</b> Indeks Sensitivitas Parameter.....                         | 56 |
| <b>Tabel 3. 4</b> Data Nilai Awal Variabel.....                              | 57 |

## DAFTAR GAMBAR

|   |    |
|---|----|
| <b>Gambar 3. 1</b> Skema penyebaran Tuberkulosis [7] .....                  | 28 |
| <b>Gambar 3. 2</b> Skema penyebaran tuberkulosis dengan parameter vaksinasi | 28 |
| <b>Gambar 3. 3</b> Grafik Simulasi pada saat $v = 0,988$ .....              | 58 |
| <b>Gambar 3. 4</b> Grafik Simulasi pada saat $v = 0,75$ .....               | 59 |
| <b>Gambar 3. 5</b> Grafik Simulasi pada saat $v = 0,3$ .....                | 60 |

## DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

|          |  |
|----------|--|
| $S(t)$   | : Banyaknya individu variabel rentan terinfeksi pada waktu ke- $t$                                 |
| $L(t)$   | : Banyaknya individu terpapar Tuberkolosis tapi tanpa gejala pada waktu ke- $t$                    |
| $I(t)$   | : Banyaknya individu yang tuberkolosis Aktif dan dengan gejala pada waktu ke- $t$                  |
| $R(t)$   | : Banyaknya individu variabel sembuh/pulih pada waktu ke- $t$                                      |
| $\mu$    | : Tingkat kelahiran dan kematian alami populasi individu   |
| $\beta$  | : Tingkat individu rentan menjadi <i>latent</i> tanpa gejala                                       |
| $k_1$    | : Tingkat individu dari <i>latent</i> menjadi sembuh ( <i>recovery</i> )                           |
| $k_2$    | : Tingkat individu dari <i>infected</i> tuberkulosis aktif menjadi sembuh ( <i>recovery</i> )      |
| $\omega$ | : Laju perubahan individu sehat ( <i>recovery</i> ) menjadi rentan ( <i>susceptible</i> ) kembali. |
| $\gamma$ | : Laju perubahan individu <i>latent</i> menjadi terinfeksi tuberkulosis aktif                      |
| $\nu$    | : Laju tingkat vaksinasi BCG   |

## DAFTAR LAMPIRAN

|  |    |
|--|----|
| <b>Lampiran 1.</b> Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar dan Titik Ekuilibrium dengan MAPLE..... | 67 |
| <b>Lampiran 2.</b> Analisis Sensitivitas dengan MAPLE.....                                       | 76 |
| <b>Lampiran 3.</b> Simulasi Numerik dengan MAPLE .....   | 78 |
| <b>Lampiran 4.</b> Grafik Simulasi Numerik 1 dengan MAPLE (Saat $\nu = 0,988$ ) .....            | 81 |
| <b>Lampiran 5.</b> Grafik Simulasi Numerik 2 dengan MAPLE (Saat $\nu = 0,75$ )                   | 83 |
| <b>Lampiran 6.</b> Grafik Simulasi Numerik 3 dengan MAPLE (Saat $\nu = 0,3$ ) ..                 | 85 |
| <b>Lampiran 7.</b> Data Penyakit Tuberkulosis Tahun 2022.....                                    | 87 |

## ABSTRAK

### MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN MEMPERHATIKAN PENGARUH VAKSINASI

Oleh

Zaahirotus Salsabila

24010119140087

Tuberkulosis adalah satu dari sepuluh penyakit yang paling berbahaya di seluruh dunia. Penyakit ini ditularkan melalui percikan ketika penderita batuk, bersin, atau interaksi lainnya. *Treatment* vaksinasi merupakan salah satu cara mencegah penyakit tuberkulosis maka pada penelitian ini bertujuan untuk menganalisis pengaruh vaksinasi melalui metode modifikasi model SLIR dengan menambahkan parameter vaksinasi dan parameter dapat kambuh kembali. Berdasarkan model tersebut, diperoleh dua titik ekuilibrium. Hasil analisis menunjukkan bahwa model memiliki bilangan reproduksi dasar pada titik ekuilibrium bebas penyakit sebesar  $R_0 = 0,07584400458 < 1$  yang dapat diartikan model stabil asimtotik lokal dan tidak menjadi pandemi kembali pada suatu populasi. Pada simulasi numerik, dimana tingkat vaksinasi sebesar 98,8% menunjukkan penyebaran penyakit tuberkulosis akan berada di tingkat yang relatif rendah di variabel *latent* dan *infected*, hal ini menunjukkan bahwa vaksinasi memiliki pengaruh yang signifikan dalam mengurangi jumlah individu terinfeksi baik yang bergejala maupun tidak bergejala (*latent*).

**Kata kunci** : Tuberkulosis, Model SLIR, Vaksinasi, *Routh-Hurwitz*.

## ABSTRACT

### A MATHEMATICS MODEL ON THE SPREAD OF TUBERCULOSIS DISEASE WITH ATTENTION TO THE EFFECT OF VACCINATION

by

Zaahirotus Salsabila

24010119140087

Tuberculosis is one of the ten most dangerous diseases worldwide. This disease is transmitted through droplets when sufferers cough, sneeze, or other interactions. Vaccination treatment is one way to prevent tuberculosis, so this study aims to analyze the effect of vaccination through a modification of the SLIR model by adding vaccination parameters and recurrence parameters. Based on this model, two equilibrium points are obtained. The results of the analysis show that the model has a basic reproduction number at the disease-free equilibrium point of  $R_0 = 0,07584400458 < 1$  which means the model is locally asymptotically stable and does not become a pandemic again in a population. In the numerical simulation, where the vaccination rate is 98.8%, it indicates that the spread of tuberculosis will be at a relatively low level in the latent and infected variables, this indicates that vaccination has a significant effect in reducing the number of infected individuals, both symptomatic and asymptomatic (*latent*).

**Keyword :** Tuberculosis, SLIR Model, Vaccination, *Routh-Hurwitz*.